



Тема 1. Корені n -го степеня

Урок 12. Узагальнення й систематизація знань учнів/учениць про корені й степені з раціональними показниками

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації.

План уроку

1. Робота над груповими (індивідуальними) проєктами.
2. Самостійна робота учнів/учениць над перетвореннями ірраціональних виразів. Гра – подорож Європою.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням/ученицям об'єднатися в невеликі групи або працювати поодиноці. Ціль — самостійне узагальнення та систематизація теоретичних відомостей про корені n -го степеня та степені з раціональними показниками. Оберіть для груп/окремих учнів (учениць) відповідний варіант проєкту.
- 2) Основна мета уроку — узагальнення та систематизація знань учнів/учениць щодо перетворень та обчислень значень ірраціональних виразів.
- 3) Додаткова мета — розвиток soft skills, готовності працювати в команді.
- 4) Підведіть підсумки гри, оголосіть, які заохочувальні призи отримають члени команди (команд), що виграли змагання.

5) Запропонуйте учасникам та учасницям команд індивідуальне домашнє завдання з пред- ставленого для гри «Подорож Європою» переліку задач.

6) Урок можна провести як урок зі створення учнівських проєктів.

I. Організаційна частина

II. Робота над груповими (індивідуальними) проєктами

III. Узагальнення й систематизація

1. Корені n -го степеня

Означення. Коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}, n \neq 1$) із даного числа a називають

Означення. Арифметичним коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}, n \neq 1$) із даного не- від'ємного числа a називають

Заповніть порожні клітинки таблиці.

Властивості коренів парного та непарного степенів			
Випадок	ОДЗ	Властивості	Приклади
n — непарне		$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n =$ $\sqrt[n]{a^n} =$ $\sqrt[n]{-a} =$ $\sqrt[n]{a^n b} = a^n \sqrt[n]{b},$ $a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b},$ $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b.$	
n — парне		$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n =$ $\sqrt[n]{a^n} =$ $\sqrt[n]{a^n b} = a \cdot \sqrt[n]{b}, b \geq 0.$ $a^n \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, & a \geq 0, b \geq 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b}, & a < 0, b \geq 0. \end{cases}$ $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b,$ $(a \geq 0, b \geq 0).$	

<i>Властивості арифметичних коренів n-го степеня</i>		
Властивість	Правило	Приклади
Корінь з добутку: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0, b \geq 0$.		
Корінь з дробу	Корінь із дробу дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника.	
Степінь кореня		$(\sqrt[4]{4})^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2$ $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$
Корінь з кореня: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, a \geq 0$.		
Пониження степеня кореня	Якщо показник кореня та показник степеня підкореневого виразу помножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.	

2. Степені з раціональними показниками

Заповніть порожні клітинки таблиці.

<i>Означення степенів з раціональними показниками</i>			
Випадок для показника степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
n — натуральне число			
n — від'ємне ціле число	$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{-n}}$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$		
$n = 0$			

<i>Означення степенів з раціональними показниками</i>			
Випадок для показника степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне додатне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$)		
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне від'ємне число		$a > 0$	

Заповніть порожні клітинки таблиці.

<i>Властивості степенів з раціональними показниками</i>		
Дії зі степенями	Формула $a, b > 0, p, q \in \mathbb{Q}$	Приклади
Множення степенів		
Ділення степенів		
Піднесення степеня до степеня		
Піднесення добутку до степеня		
Піднесення частки до степеня		

3. Корені n -го степеня та степені з раціональними показниками

Заповніть пропуски в таблиці.

Властивості коренів парного та непарного степеня			
Властивість	Випадок	Властивості	Приклади
Винесення множника з-під знака кореня та внесення множника під знак кореня	n — непарне	$\sqrt[n]{-a} =$ $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$ $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	
Винесення множника з-під знака кореня та внесення множника під знак кореня	n — парне	$\sqrt[n]{a^n b} = a \cdot \sqrt[n]{b}, b \geq 0$ $a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, & a \geq 0, b \geq 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b}, & a < 0, b \geq 0. \end{cases}$	
Порівняння коренів	n — непарне	$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$	
Порівняння коренів	n — парне	$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$ $(a \geq 0, b \geq 0)$	
Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу		$\frac{b \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{b \sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$ $\frac{c \sqrt{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}$ $\frac{c \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{c(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a \pm b}$	

Заповніть пропуски в таблиці.

Означення степенів з раціональними показниками			
Випадок для показника степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
n — натуральне число	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ $a^1 = a$		
n — від'ємне ціле число	$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{-n}}$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$		
$n = 0$	$a^0 = 1$		

<i>Означення степенів з раціональними показниками</i>			
Випадок для показника степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне додатне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1.$		
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне від'ємне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ $m = -k, k \in \mathbb{N},$ $n \in \mathbb{N}, n \neq 1.$		

Заповніть пропуски в таблиці.

<i>Властивості степенів з раціональними показниками</i>		
Дії зі степенями	Формула $a, b > 0, p, q \in \mathbb{Q}$	Приклади
Множення степенів	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	
Ділення степенів	$a^p : a^q = a^{p-q}$	
Піднесення степеня до степеня	$(a^p)^q = a^{pq}$	
Піднесення добутку до степеня	$(ab)^p = a^p b^p$	
Піднесення частки до степеня	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	
Піднесення до степенів з протилежними показниками	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	

IV. Самостійна робота. Гра – подорож Європою

Учні/учениці поділяються на команди. Кожній команді видається паперова мапа Європи (або посилання на відповідний інтернет-ресурс), і команда обирає для себе стартову країну. Кожній країні відповідає або ірраціональний вираз, або число (позначається на мапі або задається окремо). Команди здійснюють ходи за допомогою грального кубика і переходять по країнах, що мають спільний кордон. Наприклад, якщо команда обрала стартовою країною Україну і викинула на кубіку цифру 2, то вона може «потрапити» до Німеччини: Україна – Польща – Німеччина, а може потрапити й до Польщі: Україна – Словаччина – Польща. По кожній країні, яку команда «проходить», можна отримати додаткові бали — за знаходження в інтернеті видатних математиків, пов'язаних з цією країною, причому тих, про кого команда ще не згадувала, по одному для кожної країни. Так, на маршруті Україна – Польща – Німеччина можна заробити 2 додаткових бали, наприклад, за вчених Гуго Штейнгауза (Польща) та Петера Діріхле (Німеччина).

Стартовою можна обирати будь-яку європейську країну, якій відповідає ірраціональний вираз. Завершенням маршруту має бути будь-яка країна, якій відповідає правильний результат зі спрощення або обчислення значення даного виразу. Після завершення одного маршруту команда робить наступний крок (за допомогою грального кубика) та обирає іншу стартову країну (інший ірраціональний вираз). Спростує або обчислює його значення й будує новий маршрут, який проходить (за допомогою грального кубика та мапи Європи), по дорозі збираючи додаткові бали. Правильне проходження маршруту оцінюється в 15 балів (правильно побудований маршрут у відповідності до того, які числа випадають на гральному кубіку, і правильно визначена країна, в якій маршрут має завершитися), і лише для правильно виконаного основного завдання можна отримати додаткові бали: по одному балу за кожного доречно згаданого математика.

Гра має закінчитися не пізніше як за 5 хвилин до кінця уроку — для підведення підсумків.

Яка команда набрала найбільше балів — та й перемогла. Членів даної команди можна нагородити зокрема додатковими балами до тематичного оцінювання і т. ін.

Один або декілька учнів можуть допомагати вчителю виконувати роль радника та/або консультанта.

Стартова країна	Завдання	Відповідь	Де можна завершити маршрут
Україна	Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54} + 15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{61\sqrt[4]{32} + \sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}}$	0,6.	Німеччина, Бельгія, Фінляндія Данія, Італія.
Словенія	Спростіть вираз $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20} + \sqrt{12}} \cdot \sqrt[6]{8 - 2\sqrt{15}} - 2\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{a^2}}$ та знайдіть його значення при $a = 16$.	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.	Греція, Польща, Латвія, Португалія, Молдова.

Стартова країна	Завдання	Відповідь	Де можна завершити маршрут
Андорра	Спростіть вираз $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2} \cdot \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\sqrt{x}(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}$ та знайдіть його значення при $x = 16$.	2.	Чехія, Албанія, Литва, Угорщина, Іспанія.
Нідерланди	Спростіть вираз $\frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{4}} - \left(\sqrt{a^3 + 2a^2} + \sqrt[4]{a(a+2)^2} \right)}{\sqrt{2(a+1-\sqrt{a^2+2a})} \cdot \left(a^2 - a^{\frac{5}{4}} + a^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}}$ та знайдіть його значення при $a = \sqrt[3]{2}$.	$-(2 + \sqrt[4]{2})$.	Боснія і Герцеговина, Сербія, Естонія, Норвегія Хорватія.
Швеція	Спростіть вираз $\frac{\left(\sqrt{q^3} : \sqrt{p+p} \right)^{0,25} : \sqrt[8]{(p-q)^3}}{\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} + 1 \right)^{0,25}}$ та знайдіть його значення при $p = 3,75; q = 3,5$.	$\sqrt[4]{2}$.	Швейцарія Словаччина, Румунія, Австрія, Північна Македонія.
Чорногорія	Знайдіть значення виразу $\frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$.	0.	Італія, Болгарія, Франція, Люксембург.
У всіх інших європейських країнах ніяких спеціальних позначень немає.			

V. Рефлексія

- Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-