



Тема 1. Корені n -го степеня

Урок 15. **Раціональні та ірраціональні числа**

План уроку

1. Означення раціональних, ірраціональних та дійсних чисел (повторення).
2. Властивості раціональних та ірраціональних чисел.
3. Доведення раціональності та ірраціональності чисел.
4. Алгебричні та трансцендентні числа.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання варто лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово в процесі викладення матеріалу.
- 2) Теорію подавайте глибоко за змістом, але стисло за формою, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні.
- 3) До уроку наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 4) Формулюйте мотиваційні запитання, які запропоновані до кожної частини уроку.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково включаємо в урок тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навичок та навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язати обраний на занятті рівень тренувальних вправ або розв'язати інший рівень, або розв'язати

окремі завдання з усіх рівнів (оберіть для учнів/учениць схему, що відповідає засвоєнню ними теми на уроці та інших індивідуальних чинників).

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Які числа називають раціональними?

2) Які числа називають ірраціональними?

3) Наведіть приклади раціональних та ірраціональних чисел.

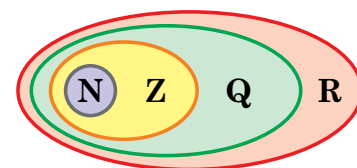
4) Як передбачити, чи є результат арифметичної дії раціональним чи ірраціональним числом?

5) Як передбачити, чи є значення кореня n -го степеня з натурального числа раціональним чи ірраціональним числом?

II. Повторення. Означення раціональних, ірраціональних та дійсних чисел

Види чисел	Означення та представлення у вигляді десяткового дробу	Приклади
Раціональні числа	Можна представити у вигляді звичайного дробу, де чисельник є цілим числом, а знаменник — натуральним числом. Можна подати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу.	$\frac{2}{3}$; $\frac{-5}{1}$; 5,2(3).
Ірраціональні числа	Не можна представити у вигляді звичайного дробу (не є раціональними). Не можна подати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу.	0,101001000100001... $\sqrt{2}$, π .
Дійсні числа	Скінченні або нескінченні десяткові дроби (раціональні та ірраціональні числа).	3,14; -5; $\sqrt{2}$; π

Згадаємо, що множину натуральних чисел $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ позначають $\mathbb{N}$; множину цілих чисел (натуральні числа, їм протилежні та нуль) позначають $\mathbb{Z}$, множину раціональних чисел позначають $\mathbb{Q}$, а множину дійсних чисел позначають $\mathbb{R}$. Зв'язок між ними легко побачити на схемі. Зокрема будь-яке раціональне число є дійсним, але обернене твердження є неправильним. Існують дійсні числа, що не є раціональними, — ірраціональні (на схемі виділені червоним кольором).



Ілюстративні приклади

1. Подайте звичайний дріб у вигляді скінченного десяткового дробу:

$$1) \frac{3}{8}; \quad 2) \frac{7}{20}.$$

Розв'язання. 1) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{3 \cdot 125}{1000} = \frac{375}{1000} = 0,375$.

$$2) \frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{35}{100} = 0,35.$$

Відповідь. 1) 0,375; 2) 0,35.

2. Подайте періодичний дріб у вигляді звичайного:

1) $0, (13)$; 2) $0, 3(4)$.

Розв'язання. 1) Нехай $0,(13) = x$, тоді $100 \cdot 0,(13) = 100x$;

$$13,(13) = 100x; \quad 13 + 0,(13) = 100x; \quad 13 + x = 100x; \quad 99x = 13; \quad x = \frac{13}{99}.$$

2) Нехай $0,3(4) = x$, тоді $34,(4) = 100x$; $34 + 0,(4) = 100x$, $0,(4) = 100x - 34$,

Оскільки $0,3(4) = x$, то $3,(4) = 10x$.

Тоді $3 + 0,(4) = 10x$, $0,(4) = 10x - 3$.

$$\text{Отж, } 0_{(4)} = 100x - 34 \text{ и } 0_{(4)} = 10x - 3.$$

Прирівнюємо праві частини рівностей:

$$100x - 34 = 10x - 3; \quad 90x = 31; \quad x = \frac{31}{90}.$$

Відповідь. 1) $\frac{13}{99}$; 2) $\frac{31}{90}$.

III. Властивості раціональних та ірраціональних чисел

Властивості дій з раціональними та ірраціональними числами	
Дія	Властивості
Додавання	Сума раціональних чисел є раціональним числом. Сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.
Віднімання	Різниця раціональних чисел є раціональним числом. Різниця раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом. Різниця ірраціонального та раціонального чисел є ірраціональним числом.
Множення	Добуток раціональних чисел є раціональним числом. Добуток ненульового раціонального числа та ірраціонального числа є ірраціональним числом.
Ділення	Частка раціональних чисел (дільник має бути ненульовим) є раціональним числом. Частка ненульового раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом. Частка ірраціонального та раціонального чисел (дільник має бути ненульовим) є ірраціональним числом.

<i>Властивості дій з раціональними та ірраціональними числами</i>	
Дія	Властивості
Корінь n -го степеня з натурального числа	Корінь n -го степеня з натурального числа, усі прості множники якого входять до розкладу у степенях, кратних n , є натуральним (а отже, й раціональним) числом. Корінь n -го степеня з натурального числа, не всі прості множники якого входять до розкладу у степенях, кратних n , є ірраціональним числом.

Наведемо декілька прикладів доведень відповідних властивостей.

1) Сума раціональних чисел є раціональним числом.

Представимо дані раціональні числа відповідно до означення:

$$x = \frac{m_1}{n_1}; y = \frac{m_2}{n_2}; m_1, m_2 \in \mathbb{Z}; n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо та перетворимо їхню суму:

$$x + y = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}.$$

Зрозуміло, що значення чисельника є цілим числом, а знаменника — натуральним.

Отже, сума $x + y$ є раціональним числом, за означенням.

2) Сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.

Припустимо супротивне: нехай сума раціонального та ірраціонального чисел є раціональним числом, тобто $x + y = z$; $x \in \mathbb{Q}$; $y, z \notin \mathbb{Q}$. Тоді матимемо:

$$x + y = z \Leftrightarrow y = z - x \Leftrightarrow y = z + (-x).$$

Отримали, що сума раціональних чисел дорівнює ірраціональному числу, що суперечить попередній властивості.

Отже, сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.

3) Корінь n -го степеня з натурального числа, усі прості множники якого входять до розкладу у степенях, кратних n , є натуральним (а отже, й раціональним) числом.

Нехай є розклад даного натурального числа на прості множники: $x = p_1^{na_1} p_2^{na_2} \dots p_k^{na_k}$.

Тоді, за властивостями коренів n -го степеня, матимемо:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p_1^{na_1} p_2^{na_2} \dots p_k^{na_k}} = \sqrt[n]{(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k})^n} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}.$$

Отже, у даному випадку корінь n -го степеня з натурального числа є натуральним числом.

4) Корінь n -го степеня з натурального числа, не всі прості множники якого входять до розкладу у степенях, кратних n , є ірраціональним числом.

Нехай розклад даного натурального числа на прості множники: $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, де a_1 не кратне n . Припустимо супротивне: корінь n -го степеня з даного натурального числа є раціональним числом. Представимо його у вигляді нескоротного дробу:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}} = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}.$$

Піднесемо дану рівність до степеня n та перетворимо її:

$$\sqrt[n]{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} = \left(\frac{p}{q}\right)^n \Leftrightarrow p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \cdot q^n = p^n.$$

Ліва частина останньої рівності містить простий множник p_1 у степені, що не кратний n (a_1 не ділиться без остачі на n , а у розклад q^n множник p_1 увійде у степені, крат-

ному n , можливо, у нульовому). Натомість права частина рівності всі прості множники, зокрема й p_1 , містить у степені, кратному n , можливо, у нульовому. Але розклад числа на прості множники, за основною теоремою арифметики, є єдиним із точністю до порядку множників. Отримали суперечність. Отже, корінь n -го степеня з натурального числа, не всі прості множники якого входять до розкладу у степенях, кратних n , є ірраціональним числом.

IV. Доведення раціональності та ірраціональності чисел

При дослідженні числа на приналежність множині раціональних чисел, варто брати до уваги:

- 1) означення раціональних чисел;
- 2) представлення раціональних та ірраціональних чисел у вигляді десяткового дробу;
- 3) властивості дій з раціональними та ірраціональними числами;
- 4) що будь-яке ціле (зокрема, натуральне) число є раціональним.

Ілюстративні приклади

- 3.** Доведіть, що $\sqrt{2}$ є ірраціональним числом.

Розв'язання. I спосіб. Припустимо супротивне, що число $\sqrt{2}$ є раціональним числом, і представимо його у вигляді $\frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{N}$, причому $\frac{p}{q}$ — нескоротний дріб.

$$\text{Тоді матимемо: } \sqrt{2} = \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Тоді $p^2 = 2q^2$ і, оскільки p і q не мають спільних простих дільників, то число p ділиться на 2, що можна записати так: $p = 2p_1$.

Оскільки число p ділиться на 2, то його можна подати у вигляді $p = 2p_1$, де $p_1 \in \mathbb{N}$.

Тоді $(2p_1)^2 = 2q^2$, $4p_1^2 = 2q^2$, $q^2 = 2p_1^2$, звідси q ділиться на 2.

Таким чином, p та q є парними. Отримуємо суперечність із тим, що дріб $\frac{p}{q}$ — нескоротний.

Отже, $\sqrt{2}$ є ірраціональним числом.

II спосіб. Оскільки число 2 є простим, то його розклад на прості множники має вигляд: $2 = 2^1$, а тому простий множник 2 входить до розкладу в степені, що не кратний до показника кореня — числа 2. Тоді, за властивістю кореня n -го степеня з натурального числа, $\sqrt[2]{2^1}$ є ірраціональним числом. Відповідно, $\sqrt{2}$ — ірраціональне число, що й треба було довести.

- 4.** Доведіть, що $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ є ірраціональним числом.

Розв'язання. Припустимо супротивне. Нехай $\sqrt{2} + \sqrt{3} = x$, $x \in \mathbb{Q}$.

Піднесемо дану рівність до квадрата та отримаємо:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = x^2 \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{6} + 3 = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{6} = \frac{x^2 - 5}{2}.$$

Ліва частина отриманої рівності, за властивістю кореня n -го степеня з натурального числа, є числом ірраціональним. Чисельник дробу у правій частині — раціональне число, знаменник — натуральне (а тому — ненульове раціональне) число. Таким чином, права частина рівності відповідає раціональному числу. Отже, ліва й права частина рівності не дорівнюють одна одній. Отримали суперечність. Тому $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ є ірраціональним числом.

V. Алгебричні та трансцендентні числа

Ірраціональні числа можна розділити на два види — алгебричні та трансцендентні.

Означення. Алгебричними називають ірраціональні числа, які є коренями багаточлена з цілими коефіцієнтами.

Означення. Трансцендентними називають ірраціональні числа, які не є коренями багаточлена з цілими коефіцієнтами, тобто не є алгебричними числами.

Ілюстративні приклади

- 5.** Доведіть, що $\sqrt{2}$ є алгебричним числом.

Розв'язання. Розглянемо багаточлен $A(x) = x^2 - 2$ з цілими коефіцієнтами.

$$A(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Отже, $\sqrt{2}$ є коренем багаточлена A з цілими коефіцієнтами, а тому є алгебричним числом.

- 6.** Доведіть, що $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ є алгебричним числом.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} = x$.

Піднесемо цю рівність до куба. Отримаємо:

$$(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})^3 = x^3 \Leftrightarrow 3 + 9 + 3\sqrt[3]{3 \cdot 9} \cdot (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = x^3 \Leftrightarrow x^3 - 9x - 12 = 0.$$

Отже, $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ є коренем багаточлена $x^3 - 9x - 12$ з цілими коефіцієнтами, а тому є алгебричним числом.

Історична довідка

Уперше поняття трансцендентного числа ввів французький математик Жозеф Ліувіль в 1844 році при дослідженні властивостей алгебричних чисел. У 1873 Шарль Ерміт довів трансцендентність числа e (границі, до якої прямують числа виду $(1 + 1/n)^n$ зі зростанням натурального числа n). У 1882 Фердинанд фон Ліндеман довів трансцендентність числа π і нерозв'язність задачі про квадратуру круга, тобто побудову циркулем та лінійкою квадрата, рівновеликого даному кругу.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Подайте раціональне число у вигляді скінченного десяткового дробу:
1) $\frac{3}{4}$; 2) $1\frac{6}{20}$; 3) $-3\frac{3}{125}$.
2. Подайте раціональне число у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу:
1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{7}$; 3) $\frac{5}{6}$.
3. Запишіть скінченний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:
1) 0,5; 2) 2,75; 3) $-3,135$.
4. Подайте нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:
1) 0,(3); 2) 0,(9); 3) 0,(15).
5. Установіть, чи є число раціональним:
1) $\frac{1}{7} + 0,12$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$; 3) $\sqrt[4]{162}$.
6. Установіть, чи може сума ірраціональних чисел дорівнювати:
1) раціональному числу; 2) ірраціональному числу; 3) нулю.

Рівень В

1. Подайте раціональне число у вигляді скінченного десяткового дробу:
1) $\frac{3}{320}$; 2) $1\frac{7}{800}$; 3) $-3\frac{13}{375}$.
2. Подайте раціональне число у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу:
1) $\frac{1}{13}$; 2) $2\frac{2}{17}$; 3) $-5\frac{7}{11}$.
3. Запишіть скінченний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:
1) 0,375; 2) 2,0025; 3) $-3,000102$.
4. Подайте нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:
1) 2,(35); 2) 0,2(27); 3) $-3,34(9)$.
5. Установіть, чи є число раціональним:
1) $\sqrt{8} - 3\sqrt{32}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{9}}{2}$; 3) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
6. Установіть, чи може добуток ірраціональних чисел дорівнювати:
1) раціональному числу; 2) ірраціональному числу; 3) нулю.
7. Доведіть ірраціональність числа:
1) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1$; 3) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}$.
8. Відомо, що сума та різниця двох чисел a і b є раціональними числами. Чи обов'язково числа a і b є раціональними?

- 9.** Відомо, що числа a , b , $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ є раціональними. Доведіть, що $\sqrt{a}$ та $\sqrt{b}$ є раціональними числами.
- 10.** Доведіть, що $\sqrt{ab}$ — ірраціональне число, якщо $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — ірраціональне число, причому числа a і b є натуральними. Чи є правильним обернене твердження?
- 11.** Установіть, раціональним чи ірраціональним є число:
1) $8^{-\frac{2}{3}}$; 2) $4^{0,6}$; 3) $(77 \cdot 91 \cdot 143)^{\frac{1}{2}}$.
- 12.** Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні числа n ірраціональним є число:
1) $\sqrt{3n+2}$; 2) $\sqrt[3]{7n+5}$; 3) $\sqrt[6]{9n-1}$.

Рівень С

- 1.** Доведіть, що число є раціональним тоді й тільки тоді, коли його можна записати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного дробу.
- 2.** Доведіть формулу для переведення періодичного десяткового дроби у звичайний:
 $A,a_1a_2...a_m(b_1b_2...b_n) = A \frac{a_1a_2...a_ma_mb_1b_2...b_na_1a_2...a_m}{\underbrace{99\dots9}_n\underbrace{00\dots0}_m}$.
- 3.** Доведіть ірраціональність числа:
1) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5};$ 2) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} .$
- 4.** Чи можуть дані числа бути членами однієї арифметичної прогресії:
1) $3; \sqrt{7}; 9;$ 2) $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5} ?$
- 5.** Визначте, чи є раціональним число:
1) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}}+10 ;$ 2) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}}+10-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} .$
- 6.** Доведіть, що ірраціональне число $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ є алгебричним.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- | | | | | |
|----|---|-----|------------------------|----|
| 1. | Я вмію застосовувати означення раціонального числа. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію перетворювати звичайний дріб у десятковий. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я розрізняю раціональні та ірраціональні числа за їхнім представленням у вигляді десяткового дробу. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію перетворювати десятковий скінченний або нескінченний періодичний дріб у звичайний дріб. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

