

Урок 15. Раціональні та ірраціональні числа

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите поняття раціонального та ірраціонального чисел;
- 2) дізнаєтеся властивості дій з раціональними та ірраціональними числами;
- 3) навчитися доводити раціональність та ірраціональність дійсних чисел;
- 4) пригадаєте перетворення звичайних дробів на десяткові й навпаки;
- 5) познайомитеся з ідеєю алгебричних та трансцендентних чисел.

II. Повторення. Означення раціональних, ірраціональних та дійсних чисел

Види чисел	Означення та представлення у вигляді десяткового дробу	Приклади
Раціональні числа	Можна представити у вигляді звичайного дробу, де чисельник є цілим числом, а знаменник — натуральним числом. Можна подати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу.	$\frac{2}{3}$; $\frac{-5}{1}$; 5,2(3).
Ірраціональні числа	Не можна представити у вигляді звичайного дробу (не є раціональними). Не можна подати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу.	0,101001000100001... $\sqrt{2}$, π .

<i>Властивості дій з раціональними та ірраціональними числами</i>	
Дія	Властивості
Ділення	Частка раціональних чисел (дільник має бути ненульовим) є раціональним числом. Частка ненульового раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом. Частка ірраціонального та раціонального чисел (дільник має бути ненульовим) є ірраціональним числом.
Корінь n -го степеня з натурального числа	Корінь n-го степеня з натурального числа, усі прості множники якого входять до розкладу у степенях, кратних n, є натуральним (а отже, й раціональним) числом. Корінь n-го степеня з натурального числа, не всі прості множники якого входять до розкладу у степенях, кратних n, є ірраціональним числом.

Наведемо декілька прикладів доведень відповідних властивостей.

1) Сума раціональних чисел є раціональним числом.

Представимо дані раціональні числа відповідно до означення:

$$x = \frac{m_1}{n_1}; y = \frac{m_2}{n_2}; m_1, m_2 \in \mathbb{Z}; n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо та перетворимо їхню суму:

$$x + y = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}.$$

Зрозуміло, що значення чисельника є цілим числом, а знаменника — натуральним.

Отже, сума $x + y$ є раціональним числом, за означенням.

2) Сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.

Припустимо супротивне: нехай сума раціонального та ірраціонального чисел є раціональним числом, тобто $x + y = z$; $x \in \mathbb{Q}$; $y, z \notin \mathbb{Q}$. Тоді матимемо:

$$x + y = z \Leftrightarrow y = z - x \Leftrightarrow y = z + (-x).$$

Отримали, що сума раціональних чисел дорівнює ірраціональному числу, що суперечить попередній властивості.

Отже, сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.

3) Корінь n -го степеня з натурального числа, усі прості множники якого входять до розкладу у степенях, кратних n , є натуральним (а отже, й раціональним) числом.

Нехай є розклад даного натурального числа на прості множники: $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$.

Тоді, за властивостями коренів n -го степеня, матимемо:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}} = \sqrt[n]{(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k})^n} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}.$$

Отже, у даному випадку корінь n -го степеня з натурального числа є натуральним числом.

4) Корінь n -го степеня з натурального числа, не всі прості множники якого входять до розкладу у степенях, кратних n , є ірраціональним числом.

Нехай розклад даного натурального числа на прості множники: $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, де a_1 не кратне n . Припустимо супротивне: корінь n -го степеня з даного натурального числа є раціональним числом. Представимо його у вигляді нескоротного дробу:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}} = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}.$$

Піднесемо дану рівність до степеня n та перетворимо її:

$$\sqrt[n]{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} = \left(\frac{p}{q}\right)^n \Leftrightarrow p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \cdot q^n = p^n.$$

Ліва частина останньої рівності містить простий множник p_1 у степені, що не кратний n (a_1 не ділиться без остачі на n , а у розклад q^n множник p_1 увійде у степені, кратному n , можливо, у нульовому). Натомість права частина рівності всі прості множники, зокрема й p_1 , містить у степені, кратному n , можливо, у нульовому. Але розклад числа на прості множники, за основною теоремою арифметики, є єдиним із точністю до порядку множників. Отримали суперечність. Отже, корінь n -го степеня з натурального числа, не всі прості множники якого входять до розкладу у степенях, кратних n , є ірраціональним числом.

IV. Доведення раціональності та ірраціональності чисел

При дослідженні числа на приналежність множині раціональних чисел, варто брати до уваги:

- 1) означення раціональних чисел;
- 2) представлення раціональних та ірраціональних чисел у вигляді десяткового дробу;
- 3) властивості дій з раціональними та ірраціональними числами;
- 4) що будь-яке ціле (зокрема, натуральне) число є раціональним.

Приклад 3. Доведіть, що $\sqrt{2}$ є ірраціональним числом.

Розв'язання. I спосіб. Припустимо супротивне, що число $\sqrt{2}$ є раціональним числом, і представимо його у вигляді $\frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{N}$, причому $\frac{p}{q}$ — нескоротний дріб.

Тоді матимемо: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Тоді $p^2 = 2q^2$ і, оскільки p і q не мають спільних простих дільників, то число p ділиться на 2, що можна записати так: $p = 2p_1$.

Оскільки число p ділиться на 2, то його можна подати у вигляді $p = 2p_1$, де $p_1 \in \mathbb{N}$.

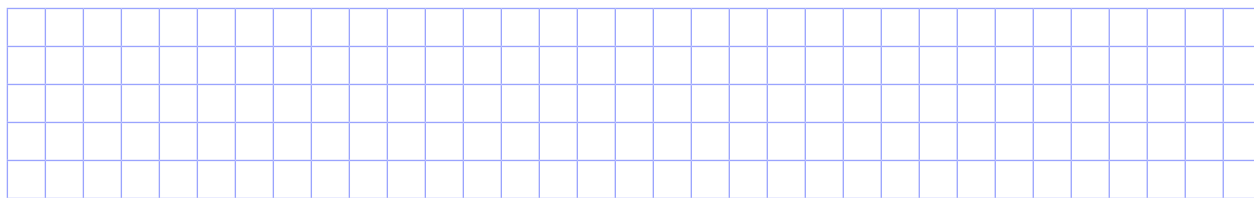
Тоді $(2p_1)^2 = 2q^2$, $4p_1^2 = 2q^2$, $q^2 = 2p_1^2$, звідси q ділиться на 2.

Таким чином, p та q є парними. Отримуємо суперечність із тим, що дріб $\frac{p}{q}$ — нескоротний.

Отже, $\sqrt{2}$ є ірраціональним числом.

II спосіб. Оскільки число 2 є простим, то його розклад на прості множники має вигляд: $2 = 2^1$, а тому простий множник 2 входить до розкладу в степені, що не кратний до показника кореня — числа 2. Тоді, за властивістю кореня n -го степеня з натурального числа, $\sqrt[2]{2^1}$ є ірраціональним числом. Відповідно, $\sqrt{2}$ — ірраціональне число, що й треба було довести.

Приклад 4. Доведіть, що $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ є ірраціональним числом.



V. Алгебричні та трансцендентні числа

Ірраціональні числа можна розділити на два види — алгебричні та трансцендентні.

Означення. Алгебричними називають ірраціональні числа, які є коренями багаточлена з цілими коефіцієнтами.

Означення. Трансцендентними називають ірраціональні числа, які не є коренями багаточлена з цілими коефіцієнтами, тобто не є алгебричними числами.

Приклад 5. Доведіть, що $\sqrt{2}$ є алгебричним числом.

Розв'язання. Розглянемо багаточлен $A(x) = x^2 - 2$ з цілими коефіцієнтами.

$$A(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Отже, $\sqrt{2}$ є коренем багаточлена A з цілими коефіцієнтами, а тому є алгебричним числом.

Історична довідка

Уперше поняття трансцендентного числа ввів французький математик Жозеф Ліувіль в 1844 році при дослідженні властивостей алгебричних чисел. У 1873 Шарль Ерміт довів трансцендентність числа e (границі, до якої прямують числа виду $(1 + 1/n)^n$ зі зростанням натурального числа n). У 1882 Фердинанд фон Ліндеман довів трансцендентність числа π і нерозв'язність задачі про квадратуру круга, тобто побудову циркулем та лінійкою квадрата, рівновеликого даному кругу.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Подайте раціональне число у вигляді скінченного десяткового дробу:
1) $\frac{3}{4}$; 2) $1\frac{6}{20}$; 3) $-3\frac{3}{125}$.
2. Подайте раціональне число у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу:
1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{7}$; 3) $\frac{5}{6}$.
3. Запишіть скінченний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:
1) 0,5; 2) 2,75; 3) $-3,135$.

- 4.** Подайте нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:
1) $0,(3)$; 2) $0,(9)$; 3) $0,(15)$.
- 5.** Установіть, чи є число раціональним:
1) $\frac{1}{7} + 0,12$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$; 3) $\sqrt[4]{162}$.
- 6.** Установіть, чи може сума ірраціональних чисел дорівнювати:
1) раціональному числу; 2) ірраціональному числу; 3) нулю.

Рівень В

- 1.** Подайте раціональне число у вигляді скінченного десяткового дробу:
1) $\frac{3}{320}$; 2) $1\frac{7}{800}$; 3) $-3\frac{13}{375}$.
- 2.** Подайте раціональне число у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу:
1) $\frac{1}{13}$; 2) $2\frac{2}{17}$; 3) $-5\frac{7}{11}$.
- 3.** Запишіть скінченний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:
1) $0,375$; 2) $2,0025$; 3) $-3,000102$.
- 4.** Подайте нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:
1) $2,(35)$; 2) $0,2(27)$; 3) $-3,34(9)$.
- 5.** Установіть, чи є число раціональним:
1) $\sqrt{8} - 3\sqrt{32}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{9}}{2}$; 3) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
- 6.** Установіть, чи може добуток ірраціональних чисел дорівнювати:
1) раціональному числу; 2) ірраціональному числу; 3) нулю.
- 7.** Доведіть ірраціональність числа:
1) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1$; 3) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}$.
- 8.** Відомо, що сума та різниця двох чисел a і b є раціональними числами. Чи обов'язково числа a і b є раціональними?
- 9.** Відомо, що числа $a, b, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ є раціональними. Доведіть, що $\sqrt{a}$ та $\sqrt{b}$ є раціональними числами.
- 10.** Доведіть, що $\sqrt{ab}$ — ірраціональне число, якщо $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — ірраціональне число, причому числа a і b є натуральними. Чи є правильним обернене твердження?
- 11.** Установіть, раціональним чи ірраціональним є число:
1) $8^{-\frac{2}{3}}$; 2) $4^{0,6}$; 3) $(77 \cdot 91 \cdot 143)^{\frac{1}{2}}$.
- 12.** Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні числа n ірраціональним є число:
1) $\sqrt{3n+2}$; 2) $\sqrt[3]{7n+5}$; 3) $\sqrt[6]{9n-1}$.

Рівень С

1. Доведіть, що число є раціональним тоді й тільки тоді, коли його можна записати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного дробу.
2. Доведіть формулу для переведення періодичного десяткового дробу у звичайний:
$$A, a_1 a_2 \dots a_m (b_1 b_2 \dots b_n) = A \frac{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n - a_1 a_2 \dots a_m}{\underbrace{99 \dots 9}_{n} \underbrace{00 \dots 0}_{m}}.$$
3. Доведіть ірраціональність числа:
 - 1) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$;
 - 2) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.
4. Чи можуть дані числа бути членами однієї арифметичної прогресії:
 - 1) $3; \sqrt{7}; 9$;
 - 2) $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}$?
5. Визначте, чи є раціональним число:
 - 1) $\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}$;
 - 2) $\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$.
6. Доведіть, що ірраціональне число $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ є алгебричним.

Рефлексія

- | | | | | |
|----|---|-----|------------------------|----|
| 1. | Я вмію застосовувати означення раціонального числа. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію перетворювати звичайний дріб у десятковий. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я розрізняю раціональні та ірраціональні числа за їхнім представленням у вигляді десяткового дробу. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію перетворювати десятковий скінченний або нескінченний періодичний дріб у звичайний дріб. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю властивості дій з раціональними та ірраціональними числами. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я можу навести приклади алгебричних та трансцендентних чисел. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

