



Тема 1.

Корені n -го степеня

Урок 16. Підсумкове заняття з теми «Корені n -го степеня»

План уроку

1. Фронтальне повторення та узагальнення.
2. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
3. Захист проєктів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює їхнє застосування, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Організуйте повторення всіх основних властивостей коренів n -го степеня та степенів з раціональними показниками.
- 2) Запропонуйте учнівству письмову перевірку відповідей до нескладних завдань домашнього завдання. За необхідності, зробіть аналіз якихось із запропонованих завдань.
- 3) Обговоріть фронтально «ідейні» задачі домашнього завдання. За необхідності, використайте опитування біля дошки або інші форми роботи.
- 4) Організуйте захист індивідуальних або командних проєктів, створених учнями/ученицями впродовж вивчення теми. Доцільно об'єднати учнів/учениць на пари: доповідач та опонент. Після захисту проєкту доповідач та опонент міняються місцями та працюють над захистом іншого проєкту. Учитель виступає в ролі радника та консультанта, оцінюючи роль кожного. Захист проєктів потрібно враховувати при виставленні тематичної оцінки. Приклад одного з проєктів наведено в цьому уроці.
- 5) Основна мета уроку — узагальнення та систематизація знань учнів/учениць щодо коренів n -го степеня та степенів з раціональним показником.
- 6) Додаткова мета — розвиток *soft skills*, готовності працювати в команді.

I. Організаційна частина

II. Фронтальне повторення та узагальнення

1. Корені n -го степеня. Властивості коренів n -го степеня

Означення. Коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$) з даного числа a називають таке число, n -ий степінь якого дорівнює a .

Означення. Арифметичним коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$) з даного невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, n -ий степінь якого дорівнює a .

Заповніть порожні клітинки таблиці. Наведіть відповідні приклади.

Корінь зі степеня		
Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,$ $\sqrt[n]{a^n} = a.$	
n — парне	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, a \geq 0,$ $\sqrt[n]{a^n} = a .$	

Властивості арифметичних коренів n-го степеня		
Властивість	Правило	Приклади
Корінь з добутку: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$ $a \geq 0, b \geq 0.$	Корінь із добутку двох множників дорівнює добутку коренів із цих множників.	
Корінь з дробу: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$ $a \geq 0, b > 0.$	Корінь із дробу дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника.	
Степінь кореня: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}, a \geq 0.$	Для того, щоб піднести корінь до степеня, треба піднести до цього степеня підкореневий вираз, а потім добути корінь.	
Корінь з кореня: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, a \geq 0$	Для добування кореня з кореня треба добути з підкореневого виразу один корінь, степінь якого дорівнює добутку показників даних коренів.	

<i>Властивості арифметичних коренів n-го степеня</i>		
Властивість	Правило	Приклади
Пониження степеня кореня: $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}, a \geq 0$	Якщо показник кореня та показник степеня підкореневого виразу домножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.	

2. Степені з раціональними показниками

Заповніть порожні клітинки таблиці. Наведіть відповідні приклади.

<i>Означення степенів з раціональними показниками</i>			
Випадок для показника степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
n — натуральне число	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ $a^1 = a$	$a \in \mathbb{R}$	
n — від'ємне ціле число	$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{-n}}$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a \neq 0$	
$n = 0$	$a^0 = 1$	$a \neq 0$	
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне додатне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$)	$a \geq 0$	
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне від'ємне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ ($m = -k, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$)	$a > 0$	

<i>Властивості степенів з раціональними показниками</i>		
Дії зі степенями	Формула $a, b > 0, p, q \in \mathbb{Q}$	Приклади
Множення степенів	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	
Ділення степенів	$a^p : a^q = a^{p-q}$	
Піднесення степеня до степеня	$(a^p)^q = a^{pq}$	
Піднесення добутку до степеня	$(ab)^p = a^p b^p$	
Піднесення частки до степеня	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	
Піднесення до степенів з протилежними показниками	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	

III. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Подайте раціональне число $-3\frac{3}{125}$ у вигляді скінченного десяткового дробу.
2. Подайте раціональне число $\frac{2}{7}$ у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу.
3. Подайте періодичний десятковий дріб $0,(15)$ у вигляді звичайного дробу.
4. Наведіть приклад двох ірраціональних чисел, сума яких є раціональним числом.
5. Установіть, чи є число $\frac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{9}}{2}$ раціональним.

Відповідь. 1) $-3,024$; 2) $0,(285714)$; 3) $\frac{5}{33}$; 4) $\sqrt{2}; -\sqrt{2}$; 5) Так.

Завдання для обговорення

1. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні числа n ірраціональним є число $\sqrt[n]{9n-1}$.

Вказівка. Розгляньте різні випадки остач натурального числа при діленні на 9 та доведіть, що у будь-якому з них остача від ділення шостого степеня на 9 дорівнює 0 або 1, натомість число $9n-1$ має при діленні на 9 остачу 8.

2. Доведіть ірраціональність числа $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$.

Вказівка. Нехай дане число дорівнює раціональному числу x , при піднесенні до куба та спрощенні отримаємо рівняння $7 + 3\sqrt[3]{10} \cdot x = x^3$, ліва частина якого є ірраціональним числом, а права — раціональним.

3. Чи можуть числа $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ бути членами однієї арифметичної прогресії?

Вказівка. Нехай дані числа є членами арифметичної прогресії з номерами m, n, k , тоді різниця прогресії дорівнює $d = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{n - m} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{k - n}$. Тоді можна подати $\sqrt{5}$ у вигляді суми $\sqrt{2}$ та $\sqrt{3}$ з раціональними коефіцієнтами. При піднесенні відповідної рівності до квадрата отримаємо суперечність: одна частина рівності буде раціональним числом, а інша — ірраціональним числом.

IV. Захист проєктів

Проект «Метод Штурма для доведення нерівностей та його застосування до середніх величин»

1. Метод Штурма.

Розглянемо набір чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ та деякі його характеристики:

- середнє арифметичне $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$;
- середнє геометричне $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$;
- середнє квадратичне $Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$;
- середнє гармонічне $H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.

Доведемо, що при додатних числах $a_1; a_2; \dots; a_n$ має місце нерівність:

$H(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$, тобто

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

причому рівність досягається в усіх частинах одночасно:

$$H = G = A = Q \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Для доведення використаємо метод, розроблений німецьким математиком Отто Рудольфом Штурмом у 19 столітті. Цей метод є одним з провідних методів доведення алгебричних нерівностей. Зокрема його можна застосувати для вивчення властивостей середніх величин.

2. Формалізація методу Штурма.

Даний метод можна формалізувати наступним чином.

Нехай для чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ виконується умова (*), а при $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ виконується нерівність $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq C_n$. Крім того, при заміні x_i на $x'_i = a_i$, а x_j на x'_j , новий набір змінних $x_1, x_2, \dots, x'_i, \dots, x'_j, \dots, x_n$ задовольняє умову (*) та $f(x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_j, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$. Тоді нерівність $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq C_n$ виконується при всіх $x_1, x_2, \dots, x_n$, що задовольняють умову (*).

Доведемо методом Штурма нерівність Коші. Для цього спочатку обґрунтуємо наступне твердження.

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$; $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$. Тоді $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$.

Розглянемо два випадки:

I випадок. Якщо $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, то $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$. Нерівність перетворюється на рівність.

II випадок. Якщо не всі x_i дорівнюють 1, то, без втрати загальності, можна вважати, що $x_1 < 1 < x_2$. Тоді замінимо перші два значення змінних наступним чином:

$x_1 \rightarrow x'_1 = 1, x_2 \rightarrow x'_2 = x_1 x_2$. Зрозуміло, що $x'_1 x'_2 = x_1 x_2$, а тому $x'_1 \cdot x'_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = 1$.

Крім того, сума всіх значень змінних при такій операції лише зменшиться:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq x'_1 + x'_2 + x_3 + \dots + x_n.$$

$$\text{Дійсно, } (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) - (x'_1 + x'_2 + x_3 + \dots + x_n) = x_1 + x_2 - x'_1 + x'_2 =$$

$$= x_1 + x_2 - 1 - x_1 x_2 = (x_1 - 1)(1 - x_2).$$

Оскільки обидва отримані множники є від'ємними, то різниця

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) - (x'_1 + x'_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

є додатною, тобто

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n > x'_1 + x'_2 + x_3 + \dots + x_n.$$

Зробивши ще декілька аналогічних кроків по зміні значень змінних, отримаємо ситуацію, коли усі змінні набувають значення 1, і при тому:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq 1 + x'_2 + x_3 + \dots + x_n \geq 1 + x'_2 + 1 + \dots + x_n \geq \dots \geq 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

Потрібну нерівність доведено.

Доведемо тепер нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним для додатних чисел:

$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ і розглянемо також випадок рівності.

Розглянемо числа $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}$. Зрозуміло, що їхній добуток дорівнює 1:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{\left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}\right)^n} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = 1.$$

Застосуємо до чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ доведену нерівність:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \Leftrightarrow \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} \geq n.$$

Тоді $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} \geq n$, звідки й випливає нерівність Коші:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

При доведенні допоміжної нерівності можна було помітити, що випадок рівності досягається лише для ситуації, коли ми жодного разу не змінюємо набір значень змінних, тобто при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Тому в нерівності Коші рівність досягається саме для цього випадку:

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} = \dots = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}, \text{ тобто при } a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Доведемо методом Штурма нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним.

Для цього спочатку обґрунтуємо наступне твердження.

Нехай $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Тоді $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$.

Розглянемо два випадки.

I випадок. Якщо $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$, то $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{1}{n}$. Нерівність перетворюється на рівність.

II випадок. Якщо не всі x_i дорівнюють 1, то, без втрати загальності, можна вважати, що $x_1 < \frac{1}{n} < x_2$. Тоді замінимо перші два значення змінних наступним чином:

$x_1 \rightarrow x_1' = \frac{1}{n}, \quad x_2 \rightarrow x_2' = x_1 + x_2 - \frac{1}{n}$. Зрозуміло, що $x_1' + x_2' = x_1 + x_2$, а тому

$$x_1' + x_2' + x_3 + \dots + x_n = 1.$$

Крім того, сума квадратів усіх значень змінних при такій операції лише зменшиться: $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > (x_1')^2 + (x_2')^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$.

$$\text{Дійсно, } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \left((x_1')^2 + (x_2')^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \right) = x_1^2 + x_2^2 - (x_1')^2 - (x_2')^2 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{n^2} - \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{n} \right)^2 =$$

$$= \left(x_1 - \frac{1}{n} \right) \left(x_1 + \frac{1}{n} \right) + \left(x_2 - \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{n} \right) \right) \left(x_2 + \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{n} \right) \right) = 2 \left(x_1 - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - x_2 \right).$$

Оскільки обидва отримані множники є від'ємними, то розглядувана різниця

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - (x_1')^2 - (x_2')^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

є додатною, тобто

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > (x_1')^2 + (x_2')^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2.$$

Зробивши ще декілька аналогічних кроків по змінненню значень змінних, отримаємо ситуацію, коли усі змінні набувають значення $\frac{1}{n}$, і при тому:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{n^2} + (x_2')^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{n^2} + (x_2')^2 + \frac{1}{n^2} + \dots + x_n^2 \geq \dots \geq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Потрібну нерівність доведено.

Доведемо тепер нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним для додатних чисел: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ і розглянемо також випадок рівності.

Розглянемо числа $x_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$. Зрозуміло, що їхня сума дорівнює 1:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = 1.$$

Застосуємо до чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ доведену нерівність: $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Тоді: $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} \geq \frac{1}{n}$, тобто $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{1} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n^2}.$$

Звідси й випливає нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$

При доведенні допоміжної нерівності можна було помітити, що випадок рівності досягається лише для ситуації, коли ми жодного разу не змінюємо набір значень змінних, тобто при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Тому й в нерівності для середнього арифметичного та середнього квадратичного рівність досягається саме для цього випадку:

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{a_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \dots = \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \text{ тобто при } a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Доведемо нерівність між середнім гармонічним та середнім геометричним.

Застосуємо нерівність Коші для набору чисел $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}.$

$$\text{Маємо: } \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}}.$$

Використаємо властивості нерівностей та перейдемо до обернених величин:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Зауважимо, що наведений ланцюжок нерівностей ґрунтувався на застосуванні нерівності Коші. Тож, рівність у них досягається тоді й тільки тоді, коли числа з набору $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ є рівними, тобто $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

3. Висновки.

За методом Штурма, доведено, що виконується наступна властивість середніх величин для додатних чисел:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

причому рівність досягається в усіх частинах одночасно:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \Leftrightarrow \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

V. Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку