

Урок 3. Властивості коренів n -го степеня

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) познайомитеся з властивостями, що пов'язують піднесення до степеня та коренів n -го степеня;
- 2) вивчите властивості коренів з добутку та дробу;
- 3) вивчите властивості добування кореня з кореня;
- 4) навчитеся зводити корінь одного степеня до кореня іншого степеня;
- 5) застосуєте корені n -го степеня для розв'язування прикладних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть значення виразу $\sqrt{49} - \sqrt[3]{-216}$.

А	Б	В	Г	Д
13	1	43	0	265

2. Розв'яжіть рівняння $x^3 = 125$.

А	Б	В	Г	Д
± 5	5	$41\frac{2}{3}$	-5	$\pm\sqrt{125}$

3. Укажіть рівняння, що має два дійсні корені.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 = 0$	$x^3 = 11$	$x^4 = 5$	$x^2 = -64$	$2x + 5 = 2(x + 1)$

4. Знайдіть множину значень змінної, при яких має зміст вираз $\sqrt[4]{5-2x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2,5]$	$(-\infty; 2,5)$	$[0; +\infty)$	$x \neq 2,5$	$[2,5; +\infty)$

5. Обчисліть: $\sqrt[3]{-8} + (\sqrt[3]{-2})^3$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{16}$	0	-10	4	-4

III. Корінь зі степеня

При перетвореннях виразів із коренями варто постійно звертати увагу на парність (непарність) показника кореня, а також на відповідну ОДЗ. Зокрема це стосується й виразів, які містять операцію піднесення до степеня.

Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\sqrt[n]{a^n} = a$.	$(\sqrt[3]{5})^3 = 5$, $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$,
n — парне	$(\sqrt[n]{a})^n = a, a \geq 0$, $\sqrt[n]{a^n} = a $.	$(\sqrt[4]{3})^4 = 3$, $\sqrt[6]{(-3)^6} = -3 = 3$.

IV. Дії з радикалами: корінь з добутку, корінь з дробу, степінь кореня, корінь з кореня, пониження степеня кореня

Так само, як і при перетворенні виразів із квадратним коренем, для коренів n -го степеня часто допомагають властивості відповідних дій. Якщо підкореневий вираз буде невід'ємним, то відповідний арифметичний корінь буде мати однакові властивості незалежно від парності показника кореня.

<i>Властивості арифметичних коренів n-го степеня</i>		
Властивість	Правило	Приклади
Корінь із добутку $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; a \geq 0, b \geq 0$	Корінь із добутку двох множників дорівнює добутку коренів із цих множників.	$\sqrt[3]{0,027 \cdot 8} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{8} = 0,3 \cdot 2 = 0,6$, $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{125 \cdot 5} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$.
Корінь з дробу $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; a \geq 0, b > 0$	Корінь із дробу дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника.	$\sqrt[3]{\frac{0,125}{0,008}} = \frac{\sqrt[3]{0,125}}{\sqrt[3]{0,008}} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5$, $\frac{\sqrt[3]{0,0625}}{\sqrt[3]{0,5}} = \sqrt[3]{\frac{0,0625}{0,5}} = \sqrt[3]{0,125} = 0,5$.

Властивості арифметичних коренів n-го степеня		
Властивість	Правило	Приклади
Степінь кореня $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; a \geq 0$	Для того, щоби піднести корінь до степеня, потрібно піднести до цього степеня підкореневий вираз, а потім добути корінь.	$(\sqrt[4]{4})^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2,$ $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32.$
Корінь з кореня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; a \geq 0$	Для добування кореня з кореня треба добути з підкореневого виразу один корінь, степінь якого дорівнює добутку показників даних коренів.	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2,$ $\sqrt[5]{x^2 + 1} = \sqrt[2]{\sqrt[5]{x^2 + 1}} = \sqrt[10]{x^2 + 1}.$
Пониження степеня кореня $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}; a \geq 0$	Якщо показник кореня та показник степеня підкореневого виразу домножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.	$\sqrt[15]{512} = \sqrt[5 \cdot 3]{2^{3 \cdot 3}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8},$ $\sqrt[6]{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} = \sqrt[6]{(x+2)^3} =$ $= \sqrt[3 \cdot 2]{(x+2)^{3 \cdot 1}} = \sqrt[2]{(x+2)^1} = \sqrt{x+2}.$

Усі наведені властивості можна довести схожими міркуваннями, аналогічними доведенню властивостей квадратного кореня. Обґрунтуємо, наприклад, властивість добування кореня з кореня: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ для будь-яких невід'ємних значень підкореневого виразу a .

Доведемо, що ліва частина даної формули дорівнює $\sqrt[nk]{a}$.

Скористаємося властивістю степенів та відомими властивостями коренів:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a.$$

Таким чином, невід'ємне число $\sqrt[nk]{a}$ у степені nk дає підкореневий вираз a в арифметичному корені $\sqrt[nk]{a}$. Звідси, за означенням, отримуємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

V. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Чисельність бактерій збільшилася у 243 рази за 5 годин. Знайдіть коефіцієнт зростання популяції бактерій за 1 годину, за умови, що він є сталим.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

$$1) \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}; \quad 2) \sqrt[5]{32 \cdot 243}; \quad 3) \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}.$$

2. Обчисліть:

$$1) \sqrt[15]{8^5}; \quad 2) \left(\sqrt[4]{25}\right)^2; \quad 3) \left(\sqrt[5]{-5}\right)^5.$$

3. Застосуйте властивість добування кореня з кореня і знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{\sqrt[4]{7^{12}}}; \quad 2) \sqrt[5]{\sqrt[5]{1024}}; \quad 3) \sqrt[7]{\sqrt[7]{x^{49}}}.$$

4. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^2}; \quad 2) \sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^2}; \quad 3) \sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}.$$

5. Знайдіть значення виразу:

$$1) \left(\sqrt[4]{0,25}\right)^8 - \left(\sqrt[3]{-0,125}\right)^6; \quad 2) \sqrt[5]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}; \quad 3) \sqrt[4]{(-2)^4} \cdot 3^4.$$

6. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[3]{a^6} + \sqrt[6]{64a^{30}}, a \geq 0; \quad 2) \sqrt[3]{a^6} + \sqrt[6]{64a^{30}}, a < 0; \quad 3) \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2a} - \frac{\sqrt[4]{32a}}{\sqrt[4]{2}}, a \geq 0.$$

Рівень В

1. Обчисліть:

$$1) \sqrt[4]{27 \cdot 48}; \quad 2) \sqrt[3]{25 \cdot 135}; \quad 3) \sqrt[3]{54 \cdot 32000}.$$

2. Обчисліть:

$$1) \sqrt[4]{3\frac{3}{8}} \cdot 1,5 + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}; \quad 2) \sqrt[5]{-\frac{243}{1024}} \cdot \sqrt[3]{-4\frac{17}{24}}; \quad 3) \frac{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{64}}{\sqrt{8}}.$$

3. Визначте, при яких значеннях змінної є правильною рівність:

$$1) \sqrt[6]{(x^2 - 3x + 2)^6} = x^2 - 3x + 2; \quad 2) \sqrt[5]{\left(\frac{2x}{x^2 - 6x + 8}\right)^5} = \frac{2x}{x^2 - 6x + 8};$$

$$3) \sqrt[6]{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^2} = 1 - x.$$

4. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{\sqrt{5} + \sqrt[4]{52}} \cdot \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt[4]{52}}; \quad 2) \sqrt[3]{\sqrt{2} - \sqrt[4]{12}} \cdot \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt[4]{12}};$$

$$3) \sqrt[6]{\sqrt{5} - \sqrt[4]{17}} \cdot \sqrt[6]{5 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{5} + \sqrt[4]{17}}.$$

5. З'ясуйте, чи є раціональним числом значення числового виразу:

$$1) 0,5 \cdot \sqrt[3]{96} \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{3}}; \quad 2) \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}; \quad 3) \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{9}.$$

6. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[12]{x^3}; \quad 2) \sqrt[3]{x^{12}}; \quad 3) \sqrt[4]{x^4 y^8}, \text{ якщо } x \geq 0.$$

7. Знайдіть допустимі значення змінної та спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{x^4} - (\sqrt[4]{x})^4$; 2) $\sqrt[5]{x^5} - (\sqrt[5]{x})^5$; 3) $\sqrt[4]{x^8} - (\sqrt[4]{\sqrt{-x}})^{16}$.

8. Порівняйте значення числового виразу $\sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3}$ та число 0,3.

9. Знайдіть ОДЗ та значення виразу:

1) $\frac{\sqrt[5]{x^2 \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x \sqrt{x}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x \sqrt[4]{x}}}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{x \sqrt[4]{x}}}{\sqrt[8]{x^2 \sqrt{x}}}$.

10. Знайдіть значення виразу $x^3 + 3x$ при $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

11. Розкладіть на множники вираз:

1) $\sqrt{x} - 25$; 2) $\sqrt[3]{x} - 8$; 3) $8x^3 + \sqrt{y}$.

12. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[4]{x^2 - 6x + 9}$; 2) $y = \sqrt[4]{(x - 3)^4} + \sqrt[3]{(x - 3)^3}$; 3) $y = \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} + \sqrt[4]{x^2 - 2x + 1}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння $5\sqrt{1 - x} = 6 - \sqrt[12]{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[4]{x^2 - 4|x| + 4}$; 2) $y = 3 - 2 \cdot \sqrt[4]{x^2 - 6|x| + 9}$; 3) $y = \left| \sqrt[6]{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^2} - \sqrt[6]{(x^2 + 6x + 9)^3} \right|$.

3. Знайдіть значення виразу при $x = 2025$:

$$(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[4]{x})(1 + \sqrt[8]{x})(1 + \sqrt[16]{x})(1 + \sqrt[32]{x})(1 - \sqrt[32]{x}).$$

4. Знайдіть значення виразу при $x = 5$:

$$(x - \sqrt{x} + 1)(1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x})(1 + \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}).$$

5. Наведіть приклад багаточлена із цілими коефіцієнтами, коренем якого є число $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}$.

6. Не використовуючи наближених обчислень, порівняйте числа $\sqrt[4]{9 - \sqrt{15}}$ та $\sqrt{\frac{\sqrt{30} - \sqrt{2}}{2}}$.

Рефлексія

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Розв'язування рівнянь четвертого степеня.
- 2.** Використання кубічних коренів у геометричних задачах.
- 3.** Застосування рівнянь вищих степенів для розв'язування задач із біології.







