



Тема 1. Корені n -го степеня

Урок 3. Властивості коренів n -го степеня

План уроку

1. Корінь зі степеня.
2. Корінь з добутку.
3. Корінь з дробу.
4. Степінь кореня.
5. Корінь з кореня.
6. Пониження степеня кореня.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно чи у співпраці з іншими визначає суттєві дані у комплексній проблемній ситуації та їхню достовірність [12 МАО 3.1.1–1];

за потреби, виправляє помилки та вносить зміни у математичну модель та/або спосіб розв'язання [12 МАО 3.2.3–1];

самостійно та у співпраці з іншими добирає доцільні математичні поняття, факти та послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–2].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Сформулюйте задачу на використання кореня. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Теорію подавайте глибоко за змістом, але стисло за формою, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні для розв'язування задач з алгебри, геометрії, фізики, хімії, тощо.
- 4) До кожної частини уроку наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Пропонуйте учням розв'язання практичної задачі в межах уроку. Впродовж розв'язування задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математич-

ного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних проблем.

7) Заплануйте розв'язання задачі практичного змісту та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навичок та навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання. Зверніть їхню увагу на завдання практичного змісту.

9) Акцентуйте увагу учнів/учениць на важливості створення проєктів, які можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для проєктів.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Як швидко порахувати $\sqrt[10]{(-5)^{10}}$?

2) Як обчислити без калькулятора $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}$?

3) Як раціонально обчислити $\sqrt[3]{125 \cdot 216 \cdot 343}$?

4) Як у зручний спосіб знайти значення виразу $\sqrt[3]{\sqrt{2025^6}}$?

5) Як можна спростити вираз $\sqrt[8]{7^4} - \sqrt{7}$?

II. Повторення

1. Знайдіть значення виразу $\sqrt{49} - \sqrt[3]{-216}$.

А	Б	В	Г	Д
13	1	43	0	265

2. Розв'яжіть рівняння $x^3 = 125$.

А	Б	В	Г	Д
± 5	5	$41\frac{2}{3}$	-5	$\pm\sqrt{125}$

3. Укажіть рівняння, що має два дійсні корені.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 = 0$	$x^3 = 11$	$x^4 = 5$	$x^2 = -64$	$2x + 5 = 2(x + 1)$

4. Знайдіть множину значень змінної, при яких має зміст вираз $\sqrt[4]{5-2x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2,5]$	$(-\infty; 2,5)$	$[0; +\infty)$	$x \neq 2,5$	$[2,5; +\infty)$

5. Обчисліть: $\sqrt[3]{-8} + (\sqrt[3]{-2})^3$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{16}$	0	-10	4	-4

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Чисельність бактерій збільшилася у 243 рази за 5 годин. Знайдіть коефіцієнт зростання популяції бактерій за 1 годину, за умови, що він є сталим.

III. Корінь зі степеня

При перетвореннях виразів із коренями варто постійно звертати увагу на парність (непарність) показника кореня, а також на відповідну ОДЗ. Зокрема це стосується й виразів, які містять операцію піднесення до степеня.

Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\sqrt[n]{a^n} = a$.	$(\sqrt[3]{5})^3 = 5$, $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$,
n — парне	$(\sqrt[n]{a})^n = a, a \geq 0$, $\sqrt[n]{a^n} = a $.	$(\sqrt[4]{3})^4 = 3$, $\sqrt[6]{(-3)^6} = -3 = 3$.

Ілюстративні приклади

6. Обчисліть: 1) $(\sqrt[3]{16})^3 - \sqrt[3]{16^3}$; 2) $(\sqrt[4]{27})^4$; 3) $\sqrt[6]{\left(-3\frac{3}{8}\right)^6} - \sqrt[4]{0,0081}$.

Розв'язання.

$$1) (\sqrt[3]{16})^3 - \sqrt[3]{16^3} = 16 - 16 = 0.$$

Відповідь. 0.

$$2) (\sqrt[4]{27})^4 = 27.$$

Відповідь. 27.

$$3) \sqrt[6]{\left(-3\frac{3}{8}\right)^6} - \sqrt[4]{0,0081} = \left|-3\frac{3}{8}\right| - \sqrt[4]{(0,3)^4} = 3\frac{3}{8} - |0,3| = 3,375 - 0,3 = 3,075.$$

Відповідь. 3,075.

7. Спростіть вираз: 1) $\left(\sqrt[6]{x^2+3}\right)^6$; 2) $\sqrt[4]{(x^2-6x)^4}$; 3) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}$.

Розв'язання.

1) Оскільки $x^2+3 \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, то $\left(\sqrt[6]{x^2+3}\right)^6 = x^2+3$ при будь-яких дійсних значеннях змінної x .

Відповідь. x^2+3 .

2) Оскільки показник кореня, число 4, — є парним, то: $\sqrt[4]{(x^2-6x)^4} = |x^2-6x|$.

За допомогою методу інтервалів легко визначити, що

$x^2-6x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$, натомість $x^2-6x < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 6)$.

Таким чином, $\sqrt[4]{(x^2-6x)^4} = |x^2-6x| = \begin{cases} x^2-6x, & x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty), \\ -x^2+6x, & x \in (0; 6). \end{cases}$

Відповідь. $x^2-6x, x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$; $-x^2+6x, x \in (0; 6)$.

3) Оскільки показник кореня, число 3, — є непарним, то:

$\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1} = \sqrt[3]{(x+1)^3} = x+1$.

Відповідь. $x+1$.

IV. Дії з радикалами: корінь з добутку, корінь з дробу, степінь кореня, корінь з кореня, пониження степеня кореня

Так само, як і при перетворенні виразів із квадратним коренем, для коренів n -го степеня часто допомагають властивості відповідних дій. Якщо підкореневий вираз буде невід'ємним, то відповідний арифметичний корінь буде мати однакові властивості незалежно від парності показника кореня.

<i>Властивості арифметичних коренів n-го степеня</i>		
<i>Властивість</i>	<i>Правило</i>	<i>Приклади</i>
Корінь із добутку $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; a \geq 0, b \geq 0$	Корінь із добутку двох множників дорівнює добутку коренів із цих множників.	$\sqrt[3]{0,027 \cdot 8} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{8} = 0,3 \cdot 2 = 0,6$, $\sqrt[4]{125 \cdot 5} = \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$.
Корінь з дробу $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; a \geq 0, b > 0$	Корінь із дробу дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника.	$\sqrt[3]{\frac{0,125}{0,008}} = \frac{\sqrt[3]{0,125}}{\sqrt[3]{0,008}} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5$, $\frac{\sqrt[3]{0,0625}}{\sqrt[3]{0,5}} = \sqrt[3]{\frac{0,0625}{0,5}} = \sqrt[3]{0,125} = 0,5$.
Степінь кореня $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; a \geq 0$	Для того, щоби піднести корінь до степеня, потрібно піднести до цього степеня підкореневий вираз, а потім добути корінь.	$\left(\sqrt[4]{4}\right)^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$.

Властивості арифметичних коренів n-го степеня		
Властивість	Правило	Приклади
Корінь з кореня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; a \geq 0$	Для добування кореня з кореня треба добути з підкореневого виразу один корінь, степінь якого дорівнює добутку показників даних коренів.	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2,$ $\sqrt[5]{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt[10]{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt[10]{x^2+1}.$
Пониження степеня кореня $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}; a \geq 0$	Якщо показник кореня та показник степеня підкореневого виразу домножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.	$\sqrt[15]{512} = \sqrt[5 \cdot 3]{2^{3 \cdot 3}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8},$ $\sqrt[6]{x^3+6x^2+12x+8} = \sqrt[6]{(x+2)^3} =$ $= \sqrt[3 \cdot 2]{(x+2)^{3 \cdot 1}} = \sqrt[2]{(x+2)^1} = \sqrt{x+2}.$

Усі наведені властивості можна довести схожими міркуваннями, аналогічними доведенню властивостей квадратного кореня. Обґрунтуємо, наприклад, властивість добування кореня з кореня: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ для будь-яких невід'ємних значень підкореневого виразу a .

Доведемо, що ліва частина даної формули дорівнює $\sqrt[nk]{a}$.

Скористаємося властивістю степенів та відомими властивостями коренів:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a.$$

Таким чином, невід'ємне число $\sqrt[nk]{a}$ у степені nk дає підкореневий вираз a в арифметичному корені $\sqrt[nk]{a}$. Звідси, за означенням, отримуємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Ілюстративні приклади

8. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{0,125 \cdot 64} + \sqrt[3]{-\frac{8}{0,125}} - \sqrt[3]{0,000001}; \quad 2) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32} + \frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}} - \left(\sqrt[3]{5}\right)^6;$$

$$3) \sqrt[6]{5-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}.$$

Розв'язання.

1) Скористаємося властивостями кореня з добутку, дробу, кореня з кореня, кореня зі степеня, а також кореня непарного степеня з числа, протилежного до даного:

$$\sqrt[3]{0,125 \cdot 64} + \sqrt[3]{-\frac{8}{0,125}} - \sqrt[3]{0,000001} = \sqrt[3]{0,125} \cdot \sqrt[3]{64} - \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{0,125}} - \sqrt[3]{(0,1)^6} =$$

$$= 0,5 \cdot 4 - \frac{2}{0,5} - 0,1 = -2,1.$$

Відповідь. $-2,1$.

$$2) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32} + \frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}} - (\sqrt[3]{5})^6 = \sqrt[3]{2 \cdot 32} + \sqrt[4]{\frac{162}{2}} - \sqrt[3]{5^6} = \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[3]{(5^2)^3} = 4 + 3 - 5^2 = -18.$$

Відповідь. -18.

$$3) \sqrt[6]{5-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{5+2\sqrt{6}} = \sqrt[6]{(5-2\sqrt{6}) \cdot (5+2\sqrt{6})} = \sqrt[6]{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt[6]{25-24} = \sqrt[6]{1} = 1.$$

Відповідь. 1.

V. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Чисельність бактерій збільшилася у 243 рази за 5 годин. Знайдіть коефіцієнт зростання популяції бактерій за 1 годину, за умови, що він є сталим.

Розв'язання. Нехай популяція бактерій на початку дослідження містила x організмів, і зростає у k разів за кожну годину. Тоді кількості бактерій через кожну годину утворюють геометричну прогресію. Через 5 годин чисельність популяції стане $x \cdot k^5$. Відповідно до умови задачі, маємо рівняння $x \cdot k^5 = 243x$. Оскільки $x \neq 0$, то $k^5 = 243$.

Отримуємо: $k = \sqrt[5]{243} = 3$, тобто популяція бактерій щогодини зростає втричі.

Відповідь. $k = 3$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

$$1) \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}; \quad 2) \sqrt[5]{32 \cdot 243}; \quad 3) \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}.$$

2. Обчисліть:

$$1) \sqrt[15]{8^5}; \quad 2) \left(\sqrt[4]{25}\right)^2; \quad 3) \left(\sqrt[5]{-5}\right)^5.$$

3. Застосуйте властивість добування кореня з кореня і знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{\sqrt[4]{7^{12}}}; \quad 2) \sqrt{\sqrt[5]{1024}}; \quad 3) \sqrt[7]{\sqrt[7]{x^{49}}}.$$

4. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^2}; \quad 2) \sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^2}; \quad 3) \sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}.$$

5. Знайдіть значення виразу:

$$1) \left(\sqrt[4]{0,25}\right)^8 - \left(\sqrt[3]{-0,125}\right)^6; \quad 2) \sqrt[5]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}; \quad 3) \sqrt[4]{(-2)^4} \cdot 3^4.$$

6. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[3]{a^6} + \sqrt[6]{64a^{30}}, a \geq 0; \quad 2) \sqrt[3]{a^6} + \sqrt[6]{64a^{30}}, a < 0; \quad 3) \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2a} - \frac{\sqrt[4]{32a}}{\sqrt[4]{2}}, a \geq 0.$$

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\sqrt[4]{27 \cdot 48}$;

2) $\sqrt[3]{25 \cdot 135}$;

3) $\sqrt[3]{54 \cdot 32000}$.

2. Обчисліть:

1) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8} \cdot 1,5 + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}}$;

2) $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}} \cdot \sqrt[3]{-4\frac{17}{24}}$;

3) $\frac{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{64}}{\sqrt{8}}$.

3. Визначте, при яких значеннях змінної є правильною рівність:

1) $\sqrt[6]{(x^2 - 3x + 2)^6} = x^2 - 3x + 2$;

2) $\sqrt[5]{\left(\frac{2x}{x^2 - 6x + 8}\right)^5} = \frac{2x}{x^2 - 6x + 8}$;

3) $\sqrt[6]{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^2} = 1 - x$.

4. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{5} + \sqrt[4]{52}} \cdot \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt[4]{52}}$;

2) $\sqrt[3]{\sqrt{2} - \sqrt[4]{12}} \cdot \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt[4]{12}}$;

3) $\sqrt[6]{\sqrt{5} - \sqrt[4]{17}} \cdot \sqrt[6]{5 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{5} + \sqrt[4]{17}}$.

5. З'ясуйте, чи є раціональним числом значення числового виразу:

1) $0,5 \cdot \sqrt[3]{96} \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{3}}$;

2) $\frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$;

3) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{9}$.

6. Спростіть вираз:

1) $^{12}\sqrt{x^3}$;

2) $\sqrt[3]{x^{12}}$;

3) $\sqrt[4]{x^4 y^8}$, якщо $x \geq 0$.

7. Знайдіть допустимі значення змінної та спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{x^4} - (\sqrt[4]{x})^4$;

2) $\sqrt[5]{x^5} - (\sqrt[5]{x})^5$;

3) $\sqrt[4]{x^8} - \left(\sqrt[4]{\sqrt{-x}}\right)^{16}$.

8. Порівняйте значення числового виразу $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3}\right)^2$ та число 0,3.

9. Знайдіть ОДЗ та значення виразу:

1) $\frac{\sqrt[5]{x^2 \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x \sqrt{x}}}$;

2) $\frac{\sqrt[4]{x^3 \sqrt{x^2}}}{\sqrt[3]{x^4 \sqrt{x}}}$;

3) $\frac{\sqrt[4]{x^4 \sqrt{x}}}{\sqrt[8]{x^2 \sqrt{x}}}$.

10. Знайдіть значення виразу $x^3 + 3x$ при $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

11. Розкладіть на множники вираз:

1) $\sqrt{x} - 25$;

2) $\sqrt[3]{x} - 8$;

3) $8x^3 + \sqrt{y}$.

12. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[4]{x^2 - 6x + 9}$;

2) $y = \sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[3]{(x-3)^3}$;

3) $y = \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} + \sqrt[4]{x^2 - 2x + 1}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння $5\sqrt{1-x} = 6 - \sqrt[12]{1-3x+3x^2-x^3}$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[4]{x^2 - 4|x| + 4}$;

2) $y = 3 - 2 \cdot \sqrt[4]{x^2 - 6|x| + 9}$;

3) $y = \left| \sqrt[6]{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^2} - \sqrt[6]{(x^2 + 6x + 9)^3} \right|$.

3. Знайдіть значення виразу при $x = 2025$:

$$(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[4]{x})(1 + \sqrt[8]{x})(1 + \sqrt[16]{x})(1 + \sqrt[32]{x})(1 - \sqrt[32]{x}).$$

4. Знайдіть значення виразу при $x = 5$:

$$(x - \sqrt{x} + 1)(1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x})(1 + \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}).$$

5. Наведіть приклад багаточлена із цілими коефіцієнтами, коренем якого є число $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}$.

6. Не використовуючи наближених обчислень, порівняйте числа $\sqrt[4]{9 - \sqrt{15}}$ та $\sqrt{\frac{\sqrt{30} - \sqrt{2}}{2}}$.

VII. Рефлексія (2 хв)

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

.....

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

.....

3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію

.....

4) Найскладнішим для мене було

.....

5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності

.....

6) Найбільше мені сподобалося

.....

Можливі теми проєктів

1. Розв'язування рівнянь четвертого степеня.

2. Використання кубічних коренів у геометричних задачах.

3. Застосування рівнянь вищих степенів для розв'язування задач із біології.