



Тема 1. Корені n -го степеня

Урок 4. Урок–практикум. Розв’язування завдань з використанням властивостей коренів n -го степеня

Тип уроку: формування умінь і навичок.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в парах над розв’язуванням завдань із використанням властивостей коренів n -го степеня.
3. Робота в малих групах над розв’язуванням рівнянь із використанням властивостей коренів n -го степеня.
4. Самостійна робота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно чи у співпраці з іншими визначає суттєві дані у комплексній проблемній ситуації та їхню достовірність [12 МАО 3.1.1–1];

за потреби, виправляє помилки та вносить зміни у математичну модель та/або спосіб розв’язання [12 МАО 3.2.3–1];

самостійно та у співпраці з іншими добирає доцільні математичні поняття, факти та послідовність дій для розв’язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–2];

застосовує визначену послідовність дій для розв’язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–3].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям письмову бліцперевірку відповідей до нескладних номерів домашнього завдання. За необхідності, зробіть аналіз декотрих із запропонованих завдань.
- 3) Сформулюйте задачу на використання коренів n -го степеня. Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте глибоко за змістом, але стисло за формою, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні для розв’язування задач з алгебри, геометрії, фізики, хімії тощо.

- 5) До кожної частини уроку наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 6) Наводьте ілюстративні приклади у межах часових можливостей уроку.
- 7) Запропонуйте учням та ученицям самостійну роботу у форматі завдань ЗНО/НМТ для визначення рівня сформованості вмінь та навичок розв'язання завдань з використанням властивостей коренів n -го степеня.
- 8) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 9) Заплануйте розв'язання задачі практичного змісту та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навичок і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 10) Акцентуйте увагу учнів/учениць на важливості створення проєктів, які можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

1. Обчисліть: $\sqrt[5]{32 \cdot 243}$.
 2. Знайдіть значення виразу $\sqrt[5]{1024}$.
 3. Спростіть вираз при виконанні додаткової умови: $\sqrt[3]{a^6} + \sqrt[6]{64a^{30}}$, $a < 0$.
 4. Спростіть вираз $\sqrt[3]{\sqrt{2} - \sqrt[4]{12}} \cdot \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt[4]{12}}$.
 5. Розкладіть на множники вираз $\sqrt{x} - 25$.
- Відповідь. 1) 6; 2) 2; 3) $-3a^5$; 4) -2 ; 5) $(\sqrt[4]{x} - 5)(\sqrt[4]{x} + 5)$.

Завдання для обговорення

1. Спростіть вираз, урахувуючи його ОДЗ: $\frac{\sqrt[5]{x^2 \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x \sqrt{x}}}$.

Корінь парного степеня визначений на множині невід'ємних чисел, і знаменник дробу не дорівнює 0, тому варто звести вирази під коренями непарних степенів до квадратних коренів, а потім у чисельнику та знаменнику скористатися формулою для кореня з кореня.

Відповідь. 1.

2. Знайдіть значення виразу $x^3 + 3x$ при $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

Варто скористатися наступним перетворенням:

$$(a - b)^3 + 3(a - b) = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) + 3(a - b) = a^3 - b^3 + 3(a - b)(1 - ab).$$

Відповідь. 4.

3. Знайдіть значення виразу при $x = 2025$:

$$(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[4]{x})(1 + \sqrt[8]{x})(1 + \sqrt[16]{x})(1 + \sqrt[32]{x})(1 - \sqrt[32]{x}).$$

Варто декілька разів скористатися формулою різниці квадратів, починаючи з добутку двох останніх множників.

Відповідь. –2024.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У посудині містяться 54 л кисню за нормальних умов. За даними умовами, оцініть розмір молекули кисню. Знайдіть необхідну для розв'язання додаткову інформацію в інтернеті.

III. Робота в парах над розв'язуванням завдань із використанням властивостей коренів n -го степеня

Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$(\sqrt[n]{a})^n = a,$ $\sqrt[n]{a^n} = a.$	$(\sqrt[3]{5})^3 = 5,$ $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2,$
n — парне	$(\sqrt[n]{a})^n = a, a \geq 0,$ $\sqrt[n]{a^n} = a .$	$(\sqrt[4]{3})^4 = 3,$ $\sqrt[6]{(-3)^6} = -3 = 3.$

Властивості арифметичних коренів n -го степеня

Властивість	Правило	Приклади
Корінь із добутку $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; a \geq 0, b \geq 0$	Корінь із добутку двох множників дорівнює добутку коренів із цих множників.	$\sqrt[3]{0,027 \cdot 8} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{8} = 0,3 \cdot 2 = 0,6,$ $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{125 \cdot 5} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5.$
Корінь з дробу $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; a \geq 0, b > 0$	Корінь із дробу дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника.	$\sqrt[3]{\frac{0,125}{0,008}} = \frac{\sqrt[3]{0,125}}{\sqrt[3]{0,008}} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5,$ $\frac{\sqrt[3]{0,0625}}{\sqrt[3]{0,5}} = \sqrt[3]{\frac{0,0625}{0,5}} = \sqrt[3]{0,125} = 0,5.$
Степінь кореня $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; a \geq 0$	Для того, щоби піднести корінь до степеня, потрібно піднести до цього степеня підкореневий вираз, а потім добути корінь.	$(\sqrt[4]{4})^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2,$ $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32.$

Властивості арифметичних коренів n -го степеня		
Властивість	Правило	Приклади
Корінь з кореня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; a \geq 0$	Для добування кореня з кореня треба добути з підкореневого виразу один корінь, степінь якого дорівнює добутку показників даних коренів.	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2,$ $\sqrt{\sqrt[5]{x^2 + 1}} = \sqrt[2]{\sqrt[5]{x^2 + 1}} = \sqrt[10]{x^2 + 1}.$
Пониження степеня кореня $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}; a \geq 0$	Якщо показник кореня та показник степеня підкореневого виразу домножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.	$\sqrt[15]{512} = \sqrt[5 \cdot 3]{2^{3 \cdot 3}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8},$ $\sqrt[6]{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} = \sqrt[6]{(x + 2)^3} =$ $= \sqrt[3 \cdot 2]{(x + 2)^{3 \cdot 1}} = \sqrt[2]{(x + 2)^1} = \sqrt{x + 2}.$

Задачі для роботи в парах

- Обчисліть: $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^9}.$
- Знайдіть значення виразу $\sqrt[3]{24 \cdot 9} + \sqrt[4]{\frac{125}{0,2}}.$
- Спростіть вираз $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} - \sqrt[12]{256}.$
- Знайдіть та виправте помилку у наступному завданні на спрощення виразу:
 $\sqrt[4]{625x^{12}} - 5\sqrt[3]{x^9}.$

Розв'язання. Перетворимо першу частину виразу, користуючись властивостями коренів: $\sqrt[4]{625x^{12}} = \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[4]{x^{12}} = \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{(x^3)^4} = 5x^3.$

Перетворимо другу частину виразу, користуючись властивостями коренів:

$$5\sqrt[3]{x^9} = 5\sqrt[3]{(x^3)^3} = 5x^3.$$

Отже, $\sqrt[4]{625x^{12}} - 5\sqrt[3]{x^9} = 5x^3 - 5x^3 = 0$ при будь-якому дійсному значенні змінної x .

Відповідь. 0.

- Заповніть пропуски у розв'язанні завдання на знаходження значення виразу з декількома коренями n -го степеня: $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})}.$

Розв'язання. Спочатку перетворимо знаменник дробу, скориставшись формулою різниці квадратів та властивостями арифметичних коренів:

$$(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}) = (\sqrt[4]{3})^2 - (\sqrt[4]{2})^2 = \dots.$$

Виділимо повний квадрат у підкореневого виразі в чисельнику:

$$5-2\sqrt{6} = \dots^2 + \dots^2 + 2 \cdot \dots \cdot \dots = (\dots)^2.$$

$$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)}=\frac{\sqrt{\left(\begin{array}{c} \dots \end{array}\right)^2}}{\dots-\dots}=\frac{\left|\begin{array}{c} \dots \end{array}\right|}{\dots-\dots}=\frac{\dots}{\dots-\dots}=\dots.$$

IV. Робота в малих групах над розв'язуванням рівнянь із використанням властивостей коренів n -го степеня

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x-2)^4} = 2$. Скільки елементів містить множина розв'язків?
2. Розв'яжіть в дійсних числах рівняння $\left(\sqrt[6]{2x+3}\right)^6 = 5$. На якому етапі розв'язання враховано приналежність змінної множині ОДЗ?
3. Розв'яжіть рівняння $\frac{\left(-\sqrt[4]{x}\right)^4 + \sqrt[3]{x^3}}{2x^5} = 2025$. Скільки ірраціональних чисел міститься серед коренів даного рівняння?
4. Побудуйте графік рівняння $\sqrt{x+y} - \sqrt[4]{x^2+y^2+4} = 0$. Які означення та властивості коренів ви використали у розв'язанні?
5. Знайдіть точки перетину графіка функції $y = \sqrt[3]{(x-1)^3} + \sqrt[5]{(x+5)^5} + \sqrt[4]{(x+3)^4} - |x+3|$ з віссю абсцис. Які властивості цієї функції допомагають оцінити їхню кількість без знаходження конкретних значень?

1. Обчисліть: $\sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{18}$.

А	Б	В	Г	Д
$^{10}\sqrt{42}$	$^{10}\sqrt{216}$	$6\sqrt{6}$	6	інша відповідь

[illegible]

2. Знайдіть значення виразу $\sqrt[6]{(1-\sqrt{7})^6}$.

А	Б	В	Г	Д
$1 - \sqrt{7}$	$\sqrt{7} - 1$	$\sqrt[36]{1 - \sqrt{7}}$	$\sqrt{7} + 1$	інша відповідь

[illegible]

Зауваження. Розрахунки велися для моделі «кисень – ідеальний газ». Легко показати, що відповідь не залежить від об'єму посудини. Насправді, за рахунок «вільного місця» між молекулами кисню, ці молекули мають вдесятеро менші розміри, ніж отримані при даному моделюванні — порядку 0,3 нанометра.

Відповідь. 3,34 нм.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням/ученицям оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
.....
.....
- 2)
.....
.....
- ?
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Історія розвитку дій з коренями та їхнє застосування в різних країнах.
2. Функція $y = \sqrt[n]{x}$ при парних та непарних показниках кореня, її властивості та графік.
3. Олімпіадні та конкурсні завдання з коренями n -го степеня.