

Урок 5. **Тотожні перетворення виразів, які містять корені n -го степеня**

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) познайомитеся з ідеєю винесення множника з-під радикала;
- 2) вивчите внесення множника під знак кореня та його застосування;
- 3) познайомитеся з ідеєю зведення подібних доданків в ірраціональних виразах;
- 4) навчитеся позбаватися ірраціональності в знаменниках дробів;
- 5) застосуєте корені n -го степеня при розв'язуванні прикладних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть значення виразу
- $(\sqrt{7})^4 - (\sqrt[4]{49})^2$
- .

А	Б	В	Г	Д
-42	42	56	0	$7 - \sqrt{49}$

2. Розв'яжіть рівняння
- $\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[4]{x^4} = -25$
- .

А	Б	В	Г	Д
± 5	5	± 25	-5	немає розв'язків

3. Спростіть вираз
- $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[8]{x}$
- .

А	Б	В	Г	Д
$\pm x$	$ x $	$\sqrt[4]{x}$	$\sqrt{x}$	$-\sqrt{x}$

4. Знайдіть значення дробу $\frac{\sqrt[4]{125}}{\sqrt[4]{0,2}}$.

A	Б	В	Г	Д
$\sqrt{5}$	5	± 5	$\sqrt[4]{5}$	$\pm \sqrt[4]{5}$

5. Обчисліть: $\sqrt[3]{-16 \cdot 108}$.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt[3]{16}$	$16\sqrt[3]{3}$	-16	-12	не існує

III. Винесення множника з-під знака кореня

При перетвореннях виразів з коренями варто звертати увагу на «подібні доданки». Але для створення відповідної можливості для їхнього «зведення» треба спростити кожний корінь — шляхом винесення множника з-під радикала.

Внесення множника з-під знака кореня		
Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$.	$\sqrt[3]{5^3 \cdot 7} = 5 \sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = 2 \cdot \sqrt[5]{4}$.
n — парне	$\sqrt[n]{a^n b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$, $b \geq 0$.	$\sqrt[6]{5^6 \cdot 4} = 5 \sqrt[6]{4} = 5 \sqrt[6]{2^2} = 5 \sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{(-3)^6 \cdot x} = -3 \cdot \sqrt[6]{x} = 3 \sqrt[6]{x}$, $x \geq 0$.

Приклад 1. Винесіть множник за знак радикала $\sqrt[4]{243a^6}$, якщо $a < 0$.

[illegible]

Приклад 2. Спростіть вираз $\sqrt[4]{64a^5}$.

[illegible]

IV. Внесення множника під знак кореня. Порівняння коренів із різних чисел

При перетвореннях ірраціональних виразів інколи доводиться виконувати дію, зворотну до винесення множника з-під радикала, тобто внесення множника під корінь. Зокрема, така дія може значно полегшити порівняння двох ірраціональних виразів.

Внесення множника під знак кореня		
Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	$2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{16}$.
n — парне	$a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, & a \geq 0, b \geq 0, \\ \sqrt[n]{a^n b}, & a < 0, b \geq 0. \end{cases}$	$2\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 5} = \sqrt[6]{64 \cdot 5} = \sqrt[6]{320}$, $x\sqrt[4]{-3x} = -\sqrt[4]{x^4 \cdot (-3x)} = -\sqrt[6]{-3x^5}$, якщо $x \leq 0$.

Усі наведені властивості можна легко перевірити за означенням кореня n -го степеня.

Щодо застосування їх на практиці – це стане у нагоді або для спрощення ірраціональних виразів, або для порівняння значень ірраціональних чисел.

Порівняння значень коренів		
Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$.	$\sqrt[3]{12} < \sqrt[3]{16}$, $2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$, $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$.
n — парне	$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$ $(a \geq 0, b \geq 0)$.	$\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[6]{25}$, $\sqrt{3} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[6]{27}$.

Наведені властивості щодо порівняння значень коренів нескладно довести, застосувавши властивості нерівностей.

Нехай n – непарне, $a < 0, b \geq 0$. Тоді зрозуміло, що $a < b$ і водночас $\sqrt[n]{a} < 0, \sqrt[n]{b} \geq 0$, звідки $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Нехай n – непарне, $a \geq 0, b \geq 0$. Якщо $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, то піднесемо обидві частини цієї нерівності до n -го степеня й отримаємо: $a < b$. Якщо $a < b$, то й $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. Дійсно, припустимо супротивне: $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$. Піднесемо обидві частини цієї нерівності до n -го степеня й отримаємо $a \geq b$ — суперечність. Отже, при $a < b$ обов'язково $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Нехай n — непарне, $a < 0, b < 0$. Якщо $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, то $-\sqrt[n]{a} > -\sqrt[n]{b}$ — отримали нерівність для додатних чисел; піднесемо обидві частини до n -го степеня, й отримаємо: $-a > -b$, звідки $a < b$. Якщо $a < b$, то й $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. Дійсно, маємо нерівність для додатних чисел: $-a > -b$, і за отриманим вище тоді: $\sqrt[n]{-a} > \sqrt[n]{-b}$. Якщо домножити обидві частини цієї нерівності на -1 , то отримаємо $-\sqrt[n]{-a} < -\sqrt[n]{-b}$, тобто $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Нехай n — парне, $a \geq 0, b \geq 0$. Властивість $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$ доводиться так само, як і при непарному значенні n у відповідному випадку.

V. Зведення подібних коренів

При перетвореннях виразів із коренями варто звертати увагу на «подібні доданки». Але для створення відповідної можливості для їхнього «зведення» треба спростити ко-

рені — шляхом винесення множника з-під радикала або внесення множника під знак радикала. Також при цьому спрощенні виразу може допомогти застосування формул скороченого множення.

VI. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробового виразу

При перетвореннях виразів із коренями інколи варто позбутися ірраціональності у знаменнику дробу. Це може виконуватися одночасно із скороченням дробу, але в окремих випадках варто помножити чисельник та знаменник дробу на вираз, «спряжений» до знаменника.

Окремі випадки звільнення від ірраціональності в знаменнику дробового виразу		
Знаменник	Перетворення	Приклади
$\sqrt[n]{a}$	$\frac{b \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{b \sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$
$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\frac{c \sqrt{a \mp b}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}$	$\frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{6 - 2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$
$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$	$\frac{c \sqrt[3]{a^2 \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{c(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a \pm b}$	$\frac{3}{\sqrt[3]{4} - 1} = \frac{3(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1)}{(\sqrt[3]{4} - 1)(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1)} =$ $= \frac{3(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1)}{4 - 1} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1.$

Приклад 3. Позбудьтеся ірраціональності у знаменнику дробу $\frac{2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$.

[illegible]

VII. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Виробник протезів планував відправити спеціальний тонкий протез, який треба було помістити по діагоналі в картонне пакування з розмірами $100\text{ см} \times 70\text{ см} \times 60\text{ см}$. Але на пошті коробки з такими розмірами не виявилося, натомість були кубічні коробки з ребром 80 см . Чи поміститься протез у таке пакування?

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Винесіть множник з-під знака кореня:
1) $\sqrt{2^5}$; 2) $\sqrt[5]{729}$; 3) $\sqrt[6]{x^{14}}$.
2. Внесіть множник під знак кореня:
1) $3\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt[5]{3}$; 3) $x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$.
3. Спростіть вираз:
1) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}$; 2) $\sqrt{3\sqrt[4]{3}}$; 3) $\sqrt[7]{x\sqrt[7]{x^2}}$.
4. Порівняйте числа без використання калькулятора:
1) $\sqrt{5}$ та $2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[4]{10}$ та $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt[3]{3}$ та $\sqrt{2}$.
5. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:
1) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; 3) $\frac{14}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$.
6. Спростіть вираз:
1) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} + 3\sqrt[3]{2}$; 2) $2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{192}$; 3) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a} - 1}$.

Рівень В

1. Винесіть множник з-під знака кореня:
1) $\sqrt[3]{-3000}$; 2) $\sqrt[5]{-486}$; 3) $\sqrt[4]{32a^5}$.
2. Винесіть множник з-під радикала, враховуючи обмеження на змінні:
1) $\sqrt[4]{162a^6}$, $a \geq 0$; 2) $\sqrt[6]{a^6b^7}$, $a < 0$; 3) $\sqrt[6]{a^{11}b^6}$, $b \neq 0$.
3. Внесіть множник під знак кореня:
1) $-x\sqrt[5]{x}$; 2) $ab\sqrt[4]{2}$, $a \geq 0, b \leq 0$; 3) $-ab\sqrt[4]{3a^2}$, $a \geq 0, b \geq 0$.
4. Внесіть множник під радикал, враховуючи обмеження на змінні:
1) $a\sqrt[4]{-a}$; 2) $2ab^2\sqrt[4]{-2a}$; 3) $ab\sqrt[4]{3a}$.
5. Спростіть вираз:
1) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$; 2) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt[2]{2}}}$; 3) $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt{x}}}$.
6. Порівняйте числа без використання калькулятора:
1) $-\sqrt[10]{10}$ та $-\sqrt[4]{5\sqrt{99}}$; 2) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$ та $\sqrt[3]{5}$; 3) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ та $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.
7. Розташуйте числа в порядку зростання:
1) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{18}$; 2) $-\sqrt[5]{3}, -\sqrt[3]{2}, -\sqrt[15]{30}$; 3) $\sqrt[5]{4}, \sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}, \sqrt[10]{25}$.
8. Позбудьтеся знака кореня в знаменнику дробу:
1) $\frac{29}{3+\sqrt[3]{2}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt[4]{2}+1}$.
9. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:
1) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}-1}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + 2}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}}$.

10. Скоротіть дріб:

1) $\frac{4-3\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8})^2};$

2) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}};$

3) $\frac{\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}.$

11. Розв'яжіть рівняння, спростивши попередньо його ліву частину:

1) $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4;$

2) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+2}+\frac{1}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}}=\frac{8}{\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[4]{x}}.$

12. Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{x\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x^{10}}};$

2) $y=\frac{x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^4}}{x};$

3) $y=\frac{x\sqrt[6]{2x^2}+\sqrt[6]{2x^8}}{\sqrt{-x}}.$

Рівень С

1. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3});$

2) $\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\cdot(3+\sqrt{2}).$

2. Винесіть множник з-під радикала, враховуючи ОДЗ:

1) $\sqrt[4]{162a^6b};$

2) $\sqrt[6]{a^6b^7};$

3) $\sqrt[6]{a^{11}b^6}.$

3. Скоротіть дріб:

1) $\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1)-2\sqrt[3]{x^2}};$

2) $\frac{1-\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}-a}.$

4. Обчисліть значення виразу $\frac{15\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+21\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}}+6\sqrt[3]{375}}.$

5. Ознайомтеся з програмою для порівняння $\sqrt[n]{a}$ та $\sqrt[m]{b}$, написаною III мовою програмування Паскаль. Які властивості коренів використані для створення цієї програми? Які переваги та недоліки ви знайшли у цій програмі? Яким чином можна позбутися знайдених недоліків?

program CompareRoots;

```
uses math;

var
  a, b, n, m: integer;
  pow1, pow2: int64;

function PowerInt(x, k: integer): int64;
var
  i: integer;
  res: int64;
begin
  res := 1;
  for i := 1 to k do
    res := res * x;
  PowerInt := res;
end;
```

```

begin
  writeln('Введіть число a:');
  readln(a);
  writeln('Введіть степінь n (корінь n-го степеня з a:');
  readln(n);
  writeln('Введіть число b:');
  readln(b);
  writeln('Введіть степінь m (корінь m-го степеня з b:');
  readln(m);

  pow1 := PowerInt(a, m); { am }
  pow2 := PowerInt(b, n); { bn }

  writeln('Порівнюємо am = ', pow1, ' і bn = ', pow2);

  if pow1 = pow2 then
    writeln('Корені рівні')
  else if pow1 > pow2 then
    writeln('Корінь ', n, '-го степеня з ', a, ' більший')
  else
    writeln('Корінь ', m, '-го степеня з ', b, ' більший');
end.

```

6. Розташуйте числа в порядку зростання: $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}$, $\sqrt[4]{2\sqrt{1\frac{1}{4}}}$.

Рефлексія

- Я знаю, як виносити множник з-під знака кореня n -го степеня.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- Я вмію вносити множник під знак радикала у випадках парного та непарного показників кореня.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- Я розумію алгоритм порівняння коренів із різних чисел та його застосування.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- Я вмію зводити подібні доданки в ірраціональних виразах.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
- Я вмію звільнятися від ірраціональності в знаменнику дробу в стандартних випадках.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----

- 6.** Я розумію ідею застосування коренів n -го степеня для розв'язування практичних задач.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

- 1.** Алгоритми порівняння значень ірраціональних виразів для різних випадків.
- 2.** Штучні прийоми перетворень для ірраціональних виразів.
- 3.** Застосування тотожних перетворень виразів для розв'язання практичних задач.







