



Тема 1. Корені n -го степеня

Урок 6. Урок-практикум. Розв'язування завдань. Тотожні перетворення виразів, які містять корені n -го степеня

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) відпрацюєте вміння та навички щодо застосування властивостей коренів n -го степеня;
- 2) відпрацюєте вміння та навички знаходження ОДЗ ірраціональних виразів;
- 3) відпрацюєте спрощення ірраціональних виразів;
- 4) відпрацюєте перетворення ірраціональних виразів із декількома коренями n -го степеня;
- 5) застосуєте набуті знання, вміння та навички для розв'язання прикладної задачі методами алгебри.

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Винесіть множник з-під знака кореня: $\sqrt[6]{x^{14}}$.
2. Внесіть множник під знак кореня: $-ab\sqrt[4]{3a^2}$, $a \geq 0, b \geq 0$.
3. Порівняйте числа без використання калькулятора: $\sqrt[4]{10}$ та $\sqrt{3}$.
4. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу $\frac{14}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$.
5. Скоротіть дріб $\frac{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}}$.

Відповідь. 1. $x^2\sqrt[6]{x^2} = x^2\sqrt[3]{|x|}$. 2. $-\sqrt[4]{3a^6b^4}$. 3. $\sqrt[4]{10} > \sqrt{3}$. 4. $2(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})$.

5. $\sqrt[4]{a} + \sqrt[3]{b}$.

Завдання для обговорення

1. Спростіть вираз $\sqrt[3]{x^4 \sqrt{x} \sqrt{x}}$.

Корінь парного степеня визначений на множині невід'ємних чисел, отже, можна вносити відповідні невід'ємні множники під знак кореня парного степеня.

Відповідь. $\sqrt[24]{x^{11}}$.

2. Винесіть множник з-під радикала $\sqrt[6]{a^6 b^7}$, враховуючи ОДЗ.

Вважаємо, що множина допустимих значень складається з пар типу $(a; b)$, для яких або $a \neq 0, b \geq 0$, або $a = 0, b \in \mathbb{R}$.

Відповідь. $|a|b\sqrt[6]{b}$ при $a \neq 0, b \geq 0$, або 0 при $a = 0, b \in \mathbb{R}$.

3. Розташуйте числа в порядку зростання: $\sqrt[16]{64}, \sqrt[10]{7^4 \sqrt{7}}, \sqrt[4]{2 \sqrt{1 \frac{1}{4}}}$.

Варто попередньо спростити вирази та подати їх у вигляді коренів восьмого степеня з натуральних чисел.

Відповідь. $\sqrt[4]{2 \sqrt{1 \frac{1}{4}}} < \sqrt[10]{7^4 \sqrt{7}} < \sqrt[16]{64}$.

III. Робота в парах над розв'язуванням завдань на властивості коренів n -го степеня

Винесення множника з-під знака кореня		
Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$.	$\sqrt[3]{5^3 \cdot 7} = 5 \sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = 2 \cdot \sqrt[5]{4}$.
n — парне	$\sqrt[n]{a^n b} = a \cdot \sqrt[n]{b}, b \geq 0$.	$\sqrt[6]{5^6 \cdot 4} = 5 \sqrt[6]{4} = 5 \sqrt[6]{2^2} = 5 \sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{(-3)^6 \cdot x} = -3 \cdot \sqrt[6]{x} = 3 \sqrt[6]{x}, x \geq 0$.
Внесення множника під знак кореня		
Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.	$2 \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{16}$.
n — парне	$a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, & a \geq 0, b \geq 0, \\ \sqrt[n]{a^n b}, & a < 0, b \geq 0. \end{cases}$	$2 \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 5} = \sqrt[6]{64 \cdot 5} = \sqrt[6]{320}$, $x \sqrt[4]{-3x} = -\sqrt[4]{x^4 \cdot (-3x)} = -\sqrt[4]{-3x^5}$ (ОДЗ: $x \leq 0$).

Порівняння значень коренів		
Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$.	$\sqrt[3]{12} < \sqrt[3]{16}$, $2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$, $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$.
n — парне	$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$ ($a \geq 0, b \geq 0$).	$\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[6]{25}$, $\sqrt{3} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[6]{27}$.

Окремі випадки звільнення від ірраціональності в знаменнику дробового виразу		
Випадок	Властивості	Приклади
$\sqrt[n]{a}$	$\frac{b \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{b \sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$.	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.
$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\frac{c \sqrt{a \mp b}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}$.	$\frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{6 - 2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.
$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$	$\frac{c \sqrt[3]{a^2 \mp \sqrt{ab} + \sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{c(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a \pm b}$.	$\frac{3}{\sqrt[3]{4} - 1} = \frac{3(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1)}{(\sqrt[3]{4} - 1)(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1)} =$ $= \frac{3(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1)}{4 - 1} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1.$

Завдання для роботи в парах

- Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt[3]{2^2 \sqrt{2}}\right)^6$.
- Спростіть вираз $\sqrt{\frac{a\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}} - \sqrt{a} + \sqrt{a}$ та знайдіть його значення при $a = 0,8$.
- Позбудьтеся ірраціональності у знаменнику дробу: $\frac{21}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2}}$.
- Знайдіть та виправте помилку у розв'язанні завдання на порівняння значень виразів: $\sqrt[4]{7 \frac{58}{81}}$ та $1,5\sqrt[3]{2}$.

Розв'язання. Перетворимо перший вираз:

$$\sqrt[4]{7 \frac{58}{81}} = \sqrt[4]{\frac{7 \cdot 81 + 58}{81}} = \sqrt[4]{\frac{625}{81}} = \frac{5}{3}.$$

Перетворимо другий вираз:

$$1,5\sqrt[3]{2} = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{3^2 \cdot 2}{2^2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \sqrt[3]{4 \frac{1}{2}}.$$

Але $\frac{5}{3} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{3}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \sqrt[3]{4\frac{17}{27}}$.

Оскільки $4\frac{17}{27} > 4\frac{1}{2}$, то $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}} < \sqrt[3]{4\frac{1}{2}}$, а отже, $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$ більше за $1,5\sqrt[3]{2}$.

Відповідь. $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}} > 1,5\sqrt[3]{2}$.

5. Заповніть пропуски у розв'язанні завдання на спрощення виразу $\frac{\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}}{a + 2 + \frac{1}{a}}$ з де-

кількома коренями n -го степеня.

Розв'язання. Перетворимо спочатку чисельник дробу:

$$\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \dots + 1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{\dots} + 1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\dots + 1}{\sqrt[3]{a^2}}.$$

Тепер перетворимо знаменник:

$$a + 2 + \frac{1}{a} = \frac{\dots + 1}{a} = \frac{(\dots)^{\dots}}{a}.$$

$$\text{Отже, } \frac{\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}}{a + 2 + \frac{1}{a}} = \frac{\frac{\dots}{\sqrt[3]{a^2}}}{\frac{\dots}{a}} = \frac{\dots}{\sqrt[3]{a^2}} : \frac{\dots}{a} = \frac{\dots}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

Відповідь.

IV. Робота в малих групах над розв'язуванням завдань на тотожні перетворення виразів, які містять корені n -го степеня. Доведення тотожностей, що містять корені n -го степеня

Завдання для роботи в групах

- Обчисліть значення виразу $\frac{1 - 2\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}}{(\sqrt{3} - \sqrt[4]{45})^2}$. Чи є отримана відповідь раціональним числом?
- Спростіть вираз $\frac{a}{\sqrt[3]{a}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}+1} + \frac{1}{1-\sqrt[3]{a}} - \frac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}}$. При яких значеннях змінної буде правильним отримане розв'язання?
- Доведіть тотожність для всіх допустимих значень змінних:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}} - \left(\frac{x + \sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{xy}} - \sqrt[4]{xy} \right) \cdot \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 2\sqrt[4]{y}.$$
- Знайдіть, при яких значеннях змінної будуть рівносильними виконані перетворення:

$$\frac{1 - \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1) - 2\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1 - \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1) - 2\sqrt[6]{a^4}} = \frac{1 - \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1 - 2\sqrt[6]{a^3})} = \frac{1 - \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1 - 2\sqrt{a})} =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(1 - \sqrt{a})^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{a}(1 - \sqrt{a})} = \frac{\sqrt[6]{a^5}(1 + \sqrt{a})}{a(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt[6]{a^5}(1 + \sqrt{a})}{a(1 - a)}.$$

- 5.** Оцініть математичну правильність розв'язання та коректність коментарів при спрощенні виразу $\left(\frac{\sqrt[4]{ab^3} - \sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{1 + \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}} \right)^{-2} \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}}}$, виконаного III.

Розв'язання. 1) Знайдемо різницю четвертих коренів у чисельнику першого дробу:

$$\sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b^3} = \sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{b}\sqrt{b}) = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt{b},$$

$$\sqrt[4]{a^3b} = \sqrt[4]{a^3}\sqrt[4]{b} = (\sqrt[4]{a}\sqrt{a})\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt{a}.$$

$$\text{Тому: } \sqrt[4]{ab^3} - \sqrt[4]{a^3b} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

2) Знаменник першого дробу $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ дорівнює $-(\sqrt{b} - \sqrt{a})$. Отже,

$$\frac{\sqrt[4]{ab^3} - \sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{-(\sqrt{b} - \sqrt{a})} = -\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}.$$

Коментар: скористалися тим, що $\sqrt{a} - \sqrt{b} = -(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.

$$3) \text{ Другий дріб: } \frac{1 + \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}} = \frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}.$$

Але $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}} = (\sqrt[4]{ab})$, оскільки квадратний корінь від ab — це квадрат кореня четвертого степеня:

$$\sqrt{ab} = (\sqrt[4]{ab})^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}} = \sqrt[4]{ab}. \text{ Отже, } \frac{1 + \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}} = \frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \sqrt[4]{ab}.$$

$$4) \text{ Додаємо результати з пунктів 2 і 3: } -\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b} + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \sqrt[4]{ab} \right).$$

Оскільки $\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{ab}$, то це спроститься до $-\sqrt[4]{ab} + \frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \sqrt[4]{ab} = \frac{1}{\sqrt[4]{ab}}$.

5) Отже, вираз у круглих дужках дорівнює $\frac{1}{\sqrt[4]{ab}}$. Підносимо це до степеня -2 :

$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} \right)^{-2}$. Коментар: піднесення до цілого степеня дозволено записувати як добуток коренів.

Оскільки $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} \right)^{-2} = (\sqrt[4]{ab})^2 = \sqrt{ab}$, отримуємо множник $\sqrt{ab}$.

6) Тепер підкореневий множник: $\sqrt{1 + \frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + 1 \right)^2} = \sqrt{\frac{a}{b}} + 1$, тому що

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \geq 0.$$

7) Перемножимо отримані множники: $\sqrt{ab} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + 1 \right) = \sqrt{ab} \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab}.$

За означенням, $\sqrt{ab}\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a^2} = a$ (бо $a > 0$). Отже, $\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + 1\right) = a + \sqrt{ab}$.

Відповідь. $a + \sqrt{ab}$.

V. Самостійна робота

1. Обчисліть: $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{0,125}} - \frac{32}{16\sqrt{16}}$.

А	Б	В	Г	Д
$-2\frac{31}{32}$	$-3\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\pm\frac{1}{32}$	інша відповідь

[illegible]

2. Спростіть вираз $\frac{\sqrt[3]{y}-4}{\sqrt[6]{y}+2}+2$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[6]{y}$	$\sqrt[6]{y} + 4$	$\sqrt[3]{y}$	y	$\sqrt[6]{y} + 2$

[illegible]

3. Знайдіть вираз, тотожно рівний виразу $\frac{1+a}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}} - 2\sqrt[6]{a}$.

А	Б	В	Г	Д
$1 - 2\sqrt{a}$	$1 - 2\sqrt[6]{a} - \sqrt[3]{a}$	$(1 + \sqrt[6]{a})^2$	$(1 - \sqrt[6]{a})^2$	$1 - \sqrt[6]{a}$

[illegible]

4. За умови $y < 0$, спростіть вираз $2,4 \cdot \sqrt[4]{\frac{625x^{10}y^4}{144^2}}$.

А	Б	В	Г	Д
$-2,4x^2y \cdot \sqrt[4]{x^2}$	$-x^2y \cdot \sqrt[4]{ x }$	$-0,2x^2y \cdot \sqrt{ x }$	$-x^2y \cdot \sqrt{ x }$	$-50x^2y \cdot \sqrt{ x }$

[illegible]

- 5.** Розташуйте числа a, b, c в порядку спадання, якщо $a = 0,1666$,

$$b = 0,1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \right), \quad c = \frac{\sqrt{4^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{16}}}{4,5}.$$

А	Б	В	Г	Д
a, b, c	c, b, a	c, a, b	b, a, c	a, c, b

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Дерев'яний куб із масою $M = 10$ кг плаває у воді, занурюючись на 12,5% своєї висоти. Знайдіть довжину ребра куба a . Використовуючи дані з мережі інтернет, спробуйте з'ясувати, з дерева якої породи виготовлено цей куб.

Рефлексія

- | | | | | |
|----|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я вмію застосовувати означення кореня n -го степеня. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію знаходити ОДЗ коренів парного та непарного степенів. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію застосовувати властивості коренів для обчислення значень ірраціональних виразів. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію застосовувати властивості коренів для спрощення ірраціональних виразів зі змінними. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію позбуватися ірраціональності у знаменниках алгебричних дробів. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію ідею застосування коренів n -го степеня для розв'язування практичних задач. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Застосування коренів n -го степеня в банківських розрахунках.
- 2.** Закони Кеплера. Періоди обертання планет.
- 3.** Використання коренів n -го степеня в задачах з фізики.







