



Тема 1. Корені n -го степеня

Урок 7. Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним декількох чисел

Тип уроку: засвоєння нових знань.

План уроку

1. Класичні середні величини.
2. Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним.
3. Упорядкування середніх величин.
4. Застосування нерівностей між середніми величинами.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання варто лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово в процесі викладення матеріалу.
- 2) Сформулюйте задачу на використання нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним трьох чисел. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Теорію подавайте глибоко за змістом, але стисло за формою, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні для розв'язування задач з алгебри, геометрії, фізики, хімії тощо.
- 4) До кожної частини уроку наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 5) Формулюйте мотиваційні запитання, які запропоновані до кожної частини уроку.

6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

7) Наводьте ілюстративні приклади у межах часових можливостей уроку.

8) Пропонуйте учням/ученицям розв'язання практичної задачі в межах уроку. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп (4 – 6 груп). Упродовж розв'язування задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних проблем.

9) Обов'язково включаємо в урок задачу практичного змісту та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навичок і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

10) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: закінчити розв'язувати обраний на занятті рівень тренувальних вправ або розв'язати інший рівень, або розв'язати окремі завдання з усіх рівнів (оберіть для учнів/учениць схему, що відповідає засвоєнню ними теми на уроку та інших індивідуальних чинників). Зверніть їхню увагу на завдання практичного змісту.

11) Акцентуйте увагу учнів/учениць на важливості створення проєктів, які можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для проєктів.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Що таке середнє арифметичне та середнє геометричне декількох чисел?
- 2) Порівняйте середнє арифметичне та середнє геометричне для набору чисел 9, 4, 6.
- 3) Як порахувати середнє квадратичне та середнє гармонічне декількох чисел?
- 4) У якому випадку всі середні величини є рівними між собою?

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Від квадратного аркуша картону зі стороною a відрізали однакові квадратні шматки по кутах. Із тієї частини, що залишилася, склали коробку у вигляді прямокутного паралелепіпеда (без верхньої грані). Якого розміру мають бути відрізані шматки, щоб об'єм паралелепіпеда був найбільшим із можливих?

II. Класичні середні величини

Розглянемо набір чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ та деякі його характеристики:

- **середнє арифметичне:** $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$;
- **середнє геометричне:** $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$;

- **середнє квадратичне:** $Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$;
- **середнє гармонічне:** $H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.

Ілюстративний приклад

1. Брати Іван, Петро і Василь зібрали восени врожай картоплі та вирішили розділити його порівну між собою. Скільки має отримати кожний з них, якщо Іван зіібрав 12 мішків, Петро – 13 мішків, а Василь — 17 мішків?

Розв'язання. Кожний із братів має отримати середнє арифметичне від зібраної кількості мішків картоплі: $A = \frac{12+13+17}{3} = \frac{42}{3} = 14$ (мішків).

Відповідь. По 14 мішків.

III. Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним

Одним з найбільш потужних методів використання середніх величин є застосування наступної теореми про нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним (нерівність Коші).

Нерівність Коші. Середнє арифметичне декількох невід'ємних чисел не менше від їхнього середнього геометричного. Рівність між ними досягається лише для випадку, коли всі дані числа є однаковими.

Якщо $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, то: 1) $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$;

2) $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Ілюстративні приклади

2. Для натуральних чисел n , що не дорівнюють 1, доведіть нерівність: $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Тут через $n!$ (факторіал) позначено $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Розв'язання. Запишемо нерівність Коші для набору чисел $1, 2, \dots, n$:

$$\frac{1+2+\dots+n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

Із урахуванням означення факторіала, маємо: $\frac{1+2+\dots+n}{n} \geq \sqrt[n]{n!}$

Скористаємося формулою для суми арифметичної прогресії:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \text{ Тоді: } \frac{n(n+1)}{2n} \geq \sqrt[n]{n!}, \text{ тобто } \frac{n+1}{2} \geq \sqrt[n]{n!}.$$

При піднесенні обох частин нерівності до степеня n , отримуємо: $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$

Рівність між лівою та правою частинами отриманої нерівності не досягається, оскільки числа $1, 2, 3, \dots, n$ не є однаковими. Отже, нерівність є строгою:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$$

- 3.** Доведіть, що для будь-якого трикутника між його півпериметром та радіусом уписаного кола справджується наступна нерівність: $p \geq 3\sqrt{3} \cdot r$. Для яких трикутників дана нерівність перетворюється на рівність?

Розв'язання. Скористаємося методом допоміжної площі та порахуємо площу трикутника через формулу Герона та через радіус уписаного кола:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad S = p \cdot r.$$

$$\text{Звідси отримуємо: } \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr \Leftrightarrow \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} = r\sqrt{p}.$$

Скористаємося нерівністю Коші для набору чисел $(p-a), (p-b), (p-c)$ і отримаємо:

$$\text{мо: } \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\text{Урахуємо означення півпериметра трикутника: } \frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Після піднесення отриманої нерівності до 3 степеня отримаємо:

$$\frac{p^3}{27} \geq (p-a)(p-b)(p-c).$$

Скористаємося наведеними вище результатами:

$$r\sqrt{p} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{\frac{p^3}{27}}, \quad r\sqrt{p} \leq \frac{p}{3} \sqrt{\frac{p}{3}}, \quad r \leq \frac{p}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 3\sqrt{3} \cdot r \leq p.$$

Зауважимо, що наведений ланцюжок нерівностей ґрунтувався на застосуванні нерівності Коші. Тож, рівність у них досягається тоді й тільки тоді, коли числа з набору $(p-a), (p-b), (p-c)$ є рівними, тобто $a = b = c$.

Отже, рівність $p = 3\sqrt{3} \cdot r$ справджується лише для рівносторонніх трикутників.

IV. Упорядкування середніх величин

Виявляється, що для додатних чисел можна впорядкувати не тільки середнє арифметичне та середнє геометричне, але й інші класичні середні величини. Більш того, можна впевнитися в тому, що вони дійсно «середні» — набувають значень між найменшим та найбільшим числами з даного набору.

Якщо $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, то:

$$1) \quad a_1 \leq H(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq Q(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq a_n, \text{ тобто}$$

$$a_1 \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \leq a_n;$$

$$2) \quad a_1 = H = G = A = Q = a_n \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Деякі з наведених фактів нескладно довести, спираючись на нерівність Коші. Розглянемо, наприклад, зв'язок між середнім гармонічним та середнім геометричним.

Застосуємо нерівність Коші для набору чисел $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$. Маємо:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}}.$$

Використаємо властивості нерівностей та перейдемо до обернених величин:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Зауважимо, що наведений ланцюжок нерівностей ґрунтувався на застосуванні нерівності Коші. Тож, рівність у них досягається тоді й тільки тоді, коли числа з набору $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ є рівними, тобто $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

V. Застосування нерівностей між середніми величинами

При впорядкуванні середніх величин використовуються як самі нерівності, так і властивість щодо перетворення нерівностей на рівності. Інколи це допомагає розв'язати відповідні рівняння, а інколи – довести, що виконується строга нерівність.

Ілюстративні приклади

4. Розв'яжіть рівняння $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

Розв'язання. Розпишемо 2 як 1+1 та застосуємо нерівність Коші для чотирьох чисел: $\frac{x^4 + y^4 + 1 + 1}{4} \geq \sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow x^4 + y^4 + 2 \geq 4\sqrt[4]{x^4 \cdot y^4} \Leftrightarrow x^4 + y^4 + 2 \geq 4|xy|$.

Оскільки будь-яке дійсне число не перевищує свого модуля, маємо:

$$x^4 + y^4 + 2 \geq 4|xy| \geq 4xy.$$

Для досягнення рівності $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$ необхідно та достатньо, щоби вона досягалася в обох використаних фактах: нерівності Коші та властивості модуля, отже:

$$\begin{cases} x^4 = y^4 = 1 = 1, \\ |xy| = xy; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 1, \\ xy \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1, \\ x = y = -1. \end{cases}$$

Відповідь. $(-1; -1), (1; 1)$.

5. Для точок сфери, заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, знайдіть найбільше можливе значення виразу $f = x + y + z$.

Розв'язання. Для додатних чисел $|x|, |y|, |z|$ застосуємо нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним. Отримаємо:

$$\frac{|x| + |y| + |z|}{3} \leq \sqrt{\frac{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}{3}} \Leftrightarrow \frac{|x| + |y| + |z|}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}.$$

Урахуємо, що число не перевищує свого модуля, а $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, за умовою.

$$\text{Тож, } \frac{x + y + z}{3} \leq \frac{|x| + |y| + |z|}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\text{звідки } x + y + z \leq 3\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x + y + z \leq \sqrt{3}.$$

Для досягнення рівності $x + y + z = \sqrt{3}$ необхідно та достатньо, щоби вона досягалася в обох використаних фактах: нерівності про середні величини та властивості модуля, отже:

$$\begin{cases} |x| = |y| = |z|, \\ |x| = x, |y| = y, |z| = z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| = |z|, \\ x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z, \\ x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки за умовою $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то $x + y + z = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

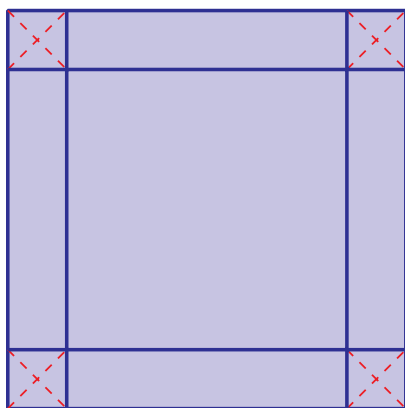
Відповідь. $\max f = \sqrt{3}$.

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Від квадратного аркуша картону зі стороною a відрізали однакові квадратні шматки по кутах. Із тієї частини, що залишилася, склали коробку у вигляді прямокутного паралелепіпеда (без верхньої грані). Якого розміру мають бути відрізані шматки, щоб об'єм паралелепіпеда був найбільшим із можливих?

Розв'язання.



Нехай сторони відрізаних квадратів дорівнюють по x , тоді висота паралелепіпеда буде x , а довжина та ширина — по $a - 2x$. Отже, об'єм дорівнює $V = x(a - 2x)^2$.

Застосуємо нерівність Коші для чисел $2x, a - 2x, a - 2x$, отримаємо:

$$\sqrt[3]{4x(a - 2x)^2} \leq \frac{4x + (a - 2x) + (a - 2x)}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{4x(a - 2x)^2} \leq \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Звідси } 4x(a - 2x)^2 \leq \left(\frac{2a}{3}\right)^3, \text{ а отже } V = x(a - 2x)^2 \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2a}{3}\right)^3 \Leftrightarrow V \leq \frac{2a^3}{27}.$$

Найбільше значення для об'єму досягається за умови рівності у використаній нерівності Коші, тобто: $4x = a - 2x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$.

Відповідь. $\frac{a}{6} \times \frac{a}{6}$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Застосуйте нерівність Коші для двох чисел та доведіть, що має місце твердження:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

2. Знайдіть найменше можливе значення виразу $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ при додатних значеннях змінних.

3. Доведіть, що має місце нерівність $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

4. Знайдіть найменше значення виразу $a^2b + b^2c + c^2a$, за умов: $a > 0, b > 0, c > 0, abc = 1$.

5. Доведіть, що для додатних значень змінних справджується нерівність:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

6. Використовуючи нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним для двох чисел, знайдіть найбільше можливе значення функції на області її визначення: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$.

Рівень В

1. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$; $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Доведіть, що $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n$.

2. Доведіть нерівність $\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geq \sqrt{2}$. При яких значеннях змінних у даній нерівності досягається знак рівності?

3. Знайдіть найбільше значення виразу $(1-a)(1-b)$, за умов: $a < 1, b < 1, a + b \geq 0,5$.

4. Доведіть що для чотирьох додатних чисел, добуток яких дорівнює 1, справджується нерівність $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$.

5. У давні часи продавець мав терези та гирю в 1 фунт. Якось йому треба було зважити для покупця 2 фунти чаю. Але він помітив, що плечі від шалюк не є однаковими, і терези неправильно зважують. Тоді продавець поклав гирю на одну шальку, а на другу насипав чай до рівноваги. Потім цей чай пересипав у пакет. Далі продавець поклав гирю на іншу шальку, а на першу насипав чай до рівноваги. Цей чай він додав у пакет. З'ясуйте, чи отримав покупець точно 2 фунти чаю? Більше 2 фунтів? Менше 2 фунтів?



6. Доведіть нерівність $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

7. Серед усіх трикутників з фіксованим периметром знайдіть той, площа якого є найбільшою.

8. Використовуючи нерівність Коші для трьох чисел, знайдіть найменше можливе значення функції $f(x) = x + \frac{32}{x^2}$ ($x > 0$).

9. Доведіть нерівність $\frac{x^2 + 13x + 4}{x + 2} \geq 6\sqrt{x}$ та розв'яжіть за його допомогою рівняння $\frac{x^2 + 13x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}$.
10. Для додатних значень змінних доведіть нерівність $ab^2c^3d^4 \leq \left(\frac{a + 2b + 3c + 4d}{10}\right)^{10}$.
11. Використайте зв'язок між середнім арифметичним та середнім квадратичним для двох чисел та доведіть, що за умови $x + y = 1$ справджується нерівність $x^8 + y^8 \geq \frac{1}{128}$.
12. Дано числа $a, b, c \in (0; 1)$ такі, що їхня сума дорівнює 2. Доведіть, що $\frac{a}{1-a} \cdot \frac{b}{1-b} \cdot \frac{c}{1-c} \geq 8$, використавши заміну змінних $x = 1 - a, y = 1 - b, z = 1 - c$ та нерівність між середнім арифметичним та середнім гармонічним для трьох чисел.

Рівень С

1. Доведіть нерівність Коші для додатних чисел, притримуючись плану, який називають методом Штурма.
- 1) Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$; $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Тоді $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.
- Вказівка.*
- 0.1. Якщо $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, то $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$.
- 0.2. Якщо не всі a_i дорівнюють 1, то можна вважати, що $a_1 < 1 < a_2$. Тоді $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq 1 + a_1 a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq \dots \geq 1 + 1 + \dots + 1 = n$.
- 2) Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, тоді $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$.
- Вказівка.* Розділіть обидві частини потрібної нерівності на $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ та скористайтесь результатом першого пункту.
2. Дано трапецію з основами a та b . Порахуйте довжини наступних відрізків, порівняйте їх між собою та зробіть висновок щодо їхнього взаємного розташування:
- 1) відрізок з кінцями на бічних сторонах трапеції, паралельний до її основ, що проходить через точку перетину діагоналей;
- 2) середня лінія трапеції;
- 3) відрізок з кінцями на бічних сторонах трапеції, що ділить її на дві рівновеликі трапеції;
- 4) відрізок з кінцями на бічних сторонах, що ділить її на дві подібні трапеції.
3. Розв'яжіть систему у невід'ємних числах: $\begin{cases} 2x^3 + 27y^3 = 9x^2y; \\ x^2 - xy + y^2 = 28. \end{cases}$
4. Нехай $a, b, c > 0$; $a + b + c = 3$. Доведіть, що $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac$.
5. Для невід'ємних значень змінної доведіть, що функція $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4$ набуває лише невід'ємних значень.
6. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n справджується нерівність $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

VIII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

(–) що залишилося незрозумілим:

(?) що здивувало або зацікавило:

Можливі теми проєктів

1. Доведення властивостей класичних середніх величин.
2. Середні степеневі та їхні властивості.
3. Вагова нерівність Коші та її застосування.
4. Застосування нерівностей між середніми величинами у конкурсах та олімпіадах.
5. Метод Штурма доведення нерівностей та його застосування до середніх величин.