

Урок 7. Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним декількох чисел

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) познайомитеся з означеннями класичних середніх величин;
- 2) познайомитеся із загальним формулюванням нерівності Коші;
- 3) познайомитеся з теоремою про впорядкування середніх величин;
- 4) розберетеся з ідеєю застосування нерівностей для середніх величин;
- 5) застосуєте нерівність Коші для розв'язування прикладної задачі.

II. Класичні середні величини

Розглянемо набір чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ та деякі його характеристики:

- **середнє арифметичне:** $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$;
- **середнє геометричне:** $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$;
- **середнє квадратичне:** $Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$;
- **середнє гармонічне:** $H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.

III. Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним

Одним з найбільш потужних методів використання середніх величин є застосування наступної теореми про нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним (нерівність Коші).

Нерівність Коші. Середнє арифметичне декількох невід'ємних чисел не менше від їхнього середнього геометричного. Рівність між ними досягається лише для випадку, коли всі дані числа є однаковими.

Якщо $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, то: 1) $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$;

2) $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

IV. Упорядкування середніх величин

Виявляється, що для додатних чисел можна впорядкувати не тільки середнє арифметичне та середнє геометричне, але й інші класичні середні величини. Більш того, можна впевнитися в тому, що вони дійсно «середні» — набувають значень між найменшим та найбільшим числами з даного набору.

Якщо $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, то:

1) $a_1 \leq H(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq Q(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq a_n$, тобто

$$a_1 \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \leq a_n;$$

2) $a_1 = H = G = A = Q = a_n \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Деякі з наведених фактів нескладно довести, спираючись на нерівність Коші. Розглянемо, наприклад, зв'язок між середнім гармонічним та середнім геометричним.

Застосуємо нерівність Коші для набору чисел $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$. Маємо:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}}.$$

Використаємо властивості нерівностей та перейдемо до обернених величин:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Зауважимо, що наведений ланцюжок нерівностей ґрунтувався на застосуванні нерівності Коші. Тож, рівність у них досягається тоді й тільки тоді, коли числа з набору

$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ є рівними, тобто $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

V. Застосування нерівностей між середніми величинами

При впорядкуванні середніх величин використовуються як самі нерівності, так і властивість щодо перетворення нерівностей на рівності. Інколи це допомагає розв'язати відповідні рівняння, а інколи – довести, що виконується строга нерівність.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

Розв'язання. Розпишемо 2 як 1+1 та застосуємо нерівність Коші для чотирьох чисел: $\frac{x^4 + y^4 + 1 + 1}{4} \geq \sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow x^4 + y^4 + 2 \geq 4\sqrt[4]{x^4 \cdot y^4} \Leftrightarrow x^4 + y^4 + 2 \geq 4|xy|$.

Оскільки будь-яке дійсне число не перевищує свого модуля, маємо:

$$x^4 + y^4 + 2 \geq 4|xy| \geq 4xy.$$

Для досягнення рівності $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$ необхідно та достатньо, щоби вона досягалася в обох використаних фактах: нерівності Коші та властивості модуля, отже:

$$\begin{cases} x^4 = y^4 = 1, \\ |xy| = xy; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 1, \\ xy \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1, \\ x = y = -1. \end{cases}$$

Відповідь. $(-1; -1), (1; 1)$.

VI. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Від квадратного аркуша картону зі стороною a відрізали однакові квадратні шматки по кутах. Із тієї частини, що залишилася, склали коробку у вигляді прямокутного паралелепіпеда (без верхньої грані). Якого розміру мають бути відрізані шматки, щоб об'єм паралелепіпеда був найбільшим із можливих?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

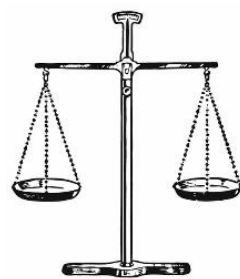
1. Застосуйте нерівність Коші для двох чисел та доведіть, що має місце твердження: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, a > 0, b > 0$.
2. Знайдіть найменше можливе значення виразу $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ при додатних значеннях змінних.
3. Доведіть, що має місце нерівність $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.
4. Знайдіть найменше значення виразу $a^2b + b^2c + c^2a$, за умов: $a > 0, b > 0, c > 0, abc = 1$.
5. Доведіть, що для додатних значень змінних справджується нерівність:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

6. Використовуючи нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним для двох чисел, знайдіть найбільше можливе значення функції на області її визначення: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$.

Рівень В

1. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$; $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Доведіть, що $(1+a_1) \cdot (1+a_2) \cdot \dots \cdot (1+a_n) \geq 2^n$.
2. Доведіть нерівність $\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geq \sqrt{2}$. При яких значеннях змінних у даній нерівності досягається знак рівності?
3. Знайдіть найбільше значення виразу $(1-a)(1-b)$, за умов: $a < 1, b < 1, a+b \geq 0,5$.
4. Доведіть що для чотирьох додатних чисел, добуток яких дорівнює 1, справджується нерівність $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$.
5. У давні часи продавець мав терези та гирю в 1 фунт. Якось йому треба було зважити для покупця 2 фунти чаю. Але він помітив, що плечі від шалюк не є однаковими, і терези неправильно зважують. Тоді продавець поклав гирю на одну шальку, а на другу насипав чай до рівноваги. Потім цей чай пересипав у пакет. Далі продавець поклав гирю на іншу шальку, а на першу насипав чай до рівноваги. Цей чай він додав у пакет. З'ясуйте, чи отримав покупець точно 2 фунти чаю? Більше 2 фунтів? Менше 2 фунтів?



6. Доведіть нерівність $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.
7. Серед усіх трикутників з фіксованим периметром знайдіть той, площа якого є найбільшою.
8. Використовуючи нерівність Коші для трьох чисел, знайдіть найменше можливе значення функції $f(x) = x + \frac{32}{x^2}$ ($x > 0$).
9. Доведіть нерівність $\frac{x^2 + 13x + 4}{x + 2} \geq 6\sqrt{x}$ та розв'яжіть за його допомогою рівняння $\frac{x^2 + 13x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}$.
10. Для додатних значень змінних доведіть нерівність $ab^2c^3d^4 \leq \left(\frac{a + 2b + 3c + 4d}{10} \right)^{10}$.
11. Використайте зв'язок між середнім арифметичним та середнім квадратичним для двох чисел та доведіть, що за умови $x + y = 1$ справджується нерівність $x^8 + y^8 \geq \frac{1}{128}$.
12. Дано числа $a, b, c \in (0;1)$ такі, що їхня сума дорівнює 2. Доведіть, що $\frac{a}{1-a} \cdot \frac{b}{1-b} \cdot \frac{c}{1-c} \geq 8$, використавши заміну змінних $x = 1-a, y = 1-b, z = 1-c$ та нерівність між середнім арифметичним та середнім гармонічним для трьох чисел.

Рівень С

- 1.** Доведіть нерівність Коші для додатних чисел, притримуючись плану, який називають методом Штурма.

1) Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$; $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Тоді $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

Вказівка.

0.1. Якщо $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, то $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$.

0.2. Якщо не всі a_i дорівнюють 1, то можна вважати, що $a_1 < 1 < a_2$. Тоді $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq 1 + a_1 a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq \dots \geq 1 + 1 + \dots + 1 = n$.

2) Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, тоді $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$.

Вказівка. Розділіть обидві частини потрібної нерівності на $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ та скористайтесь результатом першого пункту.

- 2.** Дано трапецію з основами a та b . Порахуйте довжини наступних відрізків, порівняйте їх між собою та зробіть висновок щодо їхнього взаємного розташування:

- 1) відрізок з кінцями на бічних сторонах трапеції, паралельний до її основ, що проходить через точку перетину діагоналей;
- 2) середня лінія трапеції;
- 3) відрізок з кінцями на бічних сторонах трапеції, що ділить її на дві рівновеликі трапеції;
- 4) відрізок з кінцями на бічних сторонах, що ділить її на дві подібні трапеції.

- 3.** Розв'яжіть систему у невід'ємних числах:
$$\begin{cases} 2x^3 + 27y^3 = 9x^2y; \\ x^2 - xy + y^2 = 28. \end{cases}$$

- 4.** Нехай $a, b, c > 0$; $a + b + c = 3$. Доведіть, що $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac$.

- 5.** Для невід'ємних значень змінної доведіть, що функція $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4$ набуває лише невід'ємних значень.

- 6.** Доведіть, що для будь-якого натурального значення n справджується нерівність
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим:

(-) що залишилося незрозумілим:

(?) що здивувало або зацікавило:

Можливі теми проєктів

1. Доведення властивостей класичних середніх величин.
2. Середні степеневі та їхні властивості.
3. Вагова нерівність Коші та її застосування.
4. Застосування нерівностей між середніми величинами у конкурсах та олімпіадах.
5. Метод Штурма доведення нерівностей та його застосування до середніх величин.

