



Тема 1. Корені n-го степеня

Урок 8. Означення степеня з раціональним показником. Властивості степенів із раціональними показниками

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) згадаєте поняття степеня з цілим показником;

2) познайомитеся з поняттям степеня з дробовим показником;

3) навчитеся записувати один і той самий ірраціональний вираз за допомогою як коренів n -го степеня, так і степенів з раціональними показниками;

4) навчитеся застосовувати узагальнені властивості степенів для обчислень або спрощення ірраціональних виразів.

5) познайомитеся з ідеєю застосування степенів з раціональним показником при розв'язуванні прикладних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть значення виразу $\sqrt[3]{216} - \sqrt[4]{81}$.

А	Б	В	Г	Д
3	135	-3	± 3	$\sqrt[12]{135}$

2. Розв'яжіть рівняння $x^{-2} = 25$.

А	Б	В	Г	Д
± 5	$\pm 0,2$	0,2	$\frac{1}{5}$	625

3. Спростіть вираз $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[4]{x}$	$\sqrt[5]{x}$	$\sqrt[6]{x}$	$\sqrt[5]{ x }$	$\sqrt[3]{x^2}$

4. Знайдіть ОДЗ виразу $\sqrt[4]{(2x-5)^3}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2,5]$	$(-\infty; 2,5)$	$[0; +\infty)$	$x \neq 2,5$	$[2,5; +\infty)$

5. Обчисліть: $\left(\sqrt[4]{(-5)^2}\right)^2$.

А	Б	В	Г	Д
± 5	-5	5	-25	25

III. Означення степеня з раціональним показником

При перетвореннях ірраціональних виразів варто звернути увагу на те, що властивості коренів подібні до властивостей степенів. Отже, можна поєднати відповідні ідеї та застосовувати надалі узагальнення понять степенів з цілим показником та коренів n -го степеня.

Випадок для показника степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
n — натуральне число	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$. $a^1 = a$.	$a \in \mathbb{R}$	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, $-2^1 = -2$.
n — від'ємне ціле число	$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{-n}}$. $a^{-1} = \frac{1}{a}$.		$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{81}$.
$n = 0$	$a^0 = 1$.	$a \neq 0$	$(-\pi)^0 = 1$.
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне додатне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$).	$a \geq 0$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$, $0^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{0^3} = \sqrt[4]{0} = 0$.
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне від'ємне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ ($m = -k, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$).	$a > 0$	$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

IV. Доведення властивостей степенів із раціональними показниками

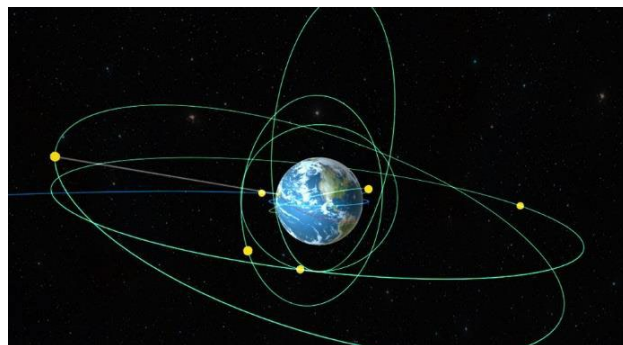
Властивості степенів із раціональними показниками ґрунтуються на відомих вам властивостях степенів із цілими показниками та властивостях арифметичних коренів n -го степеня.

Властивості степенів з раціональними показниками			
Дії зі степенями	Формула $a, b > 0$ $p, q \in \mathbb{Q}$	Ідея доведення	Приклади
Множення степенів	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n_2]{a^{m_2}} =$ $= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2}} \cdot \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_2 n_1}} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}} =$ $= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}} = a^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}} = a^{p+q}.$	$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}} =$ $= x^{\frac{8}{12} + \frac{9}{12}} = x^{\frac{17}{12}}.$
Ділення степенів	$a^p : a^q = a^{p-q}$	$a^p : a^q = a^{\frac{m_1}{n_1}} : a^{\frac{m_2}{n_2}} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}} : \sqrt[n_2]{a^{m_2}} =$ $= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2}} : \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_2 n_1}} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2} : a^{m_2 n_1}} =$ $= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2 - m_2 n_1}} = a^{\frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{n_1 n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}} = a^{p-q}.$	$x^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}} =$ $= x^{\frac{5}{15} - \frac{6}{15}} = x^{-\frac{1}{15}}.$
Піднесення степеня до степеня	$(a^p)^q = a^{pq}$	$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}} = \sqrt[n_2]{\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{m_2}} = \sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a^{m_1 m_2}}} =$ $= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}} = a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}} = a^{pq}.$	$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{15}{2}} = x^{\frac{1}{5} \cdot \frac{15}{2}} =$ $= x^{\frac{15}{10}} = x^{\frac{3}{2}}.$
Піднесення добутку до степеня	$(ab)^p = a^p b^p$	$(ab)^p = (ab)^{\frac{m_1}{n_1}} = \sqrt[n_1]{(ab)^{m_1}} = \sqrt[n_1]{a^{m_1} b^{m_1}} =$ $= \sqrt[n_1]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n_1]{b^{m_1}} = a^{\frac{m_1}{n_1}} b^{\frac{m_1}{n_1}} = a^p b^p.$	$\left(x^{\frac{1}{5}} y^{0,1}\right)^{10} =$ $= \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10} \cdot \left(y^{0,1}\right)^{10} =$ $= x^2 y^1 = x^2 y.$
Піднесення частки до степеня	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m_1}{n_1}} = \sqrt[n_1]{\left(\frac{a}{b}\right)^{m_1}} = \sqrt[n_1]{a^{m_1} : b^{m_1}} =$ $= \sqrt[n_1]{a^{m_1}} : \sqrt[n_1]{b^{m_1}} = a^{\frac{m_1}{n_1}} : b^{\frac{m_1}{n_1}} = a^p : b^p = \frac{a^p}{b^p}.$	$\left(\frac{x^{\frac{1}{5}}}{y^{\frac{3}{4}}}\right)^{10} = \frac{\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10}}{\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^{10}} =$ $= \frac{x^2}{y^{\frac{15}{2}}}.$
Піднесення до степенів із протилежними показниками	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^{-p} = a^{-\frac{m_1}{n_1}} = a^{\frac{-m_1}{n_1}} = \sqrt[n_1]{a^{-m_1}} =$ $= \sqrt[n_1]{\frac{1}{a^{m_1}}} = \frac{1}{\sqrt[n_1]{a^{m_1}}} = \frac{1}{a^{\frac{m_1}{n_1}}} = \frac{1}{a^p}.$	$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}.$

V. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. За законом Кеплера, супутники обертаються по еліптичній орбіті, причому квадрат періоду обертання пропорційний до куба більшої півосі. Орбіту штучного супутника вирішили змінити таким чином, щоби період обертання зріс удвічі. У скільки разів доведеться змінити більшу піввісь траєкторії супутника?



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Подайте степінь із дробовим показником у вигляді кореня:

1) $2a^{\frac{1}{3}}$; 2) $(2a)^{-\frac{3}{4}}$; 3) $(4x)^{-1,5}$.

2. Знайдіть значення виразу:

1) $9^{-\frac{1}{6}} \cdot 9 : 9^{\frac{1}{3}}$; 2) $25^{\frac{1}{4}} \cdot \left(5^{-\frac{1}{6}}\right)^{-3}$; 3) $\left(\frac{1}{16} \cdot 9^2\right)^{-\frac{1}{4}}$.

3. Замініть арифметичний корінь степенем із дробовим показником:

1) $\sqrt[5]{3^2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; 3) $\sqrt[11]{2x^2}$.

4. Спростіть вираз:

1) $(8x^{-0,3})^{-\frac{2}{3}}$; 2) $a^{2,5} \cdot \left(a^{-\frac{3}{14}}\right)^7$; 3) $(32y^{-2,5})^{\frac{2}{5}}$.

5. Визначте, при яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $(8x-4)^{\frac{2}{3}}$; 2) $(y-2)^{-\frac{3}{4}} + (1+y)^{0,5}$; 3) $(2a+1)^{\frac{3}{8}+0,125-\frac{1}{2}}$.

6. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}}{a^{\frac{1}{6}}}$; 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{4}}}$; 3) $\frac{(\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3}{a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}$.

Рівень В

1. Подайте степінь із дробовим показником у вигляді кореня:

1) $-2x^{-1,75}$; 2) $(a-b)^{\frac{3}{5}}$; 3) $-2^{0,25}x^{-1}$.

2. Знайдіть значення виразу:

1) $100^{1,3} \cdot 100^{-\frac{2}{15}} : 100^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(2,5^{-\frac{2}{9}}\right)^{1,5} \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{6}}$; 3) $\left(\frac{27}{216} \cdot 0,064\right)^{-\frac{2}{3}}$.

3. Перетворіть ірраціональний вираз, використовуючи степінь із дробовим показником:

$$1) a^5 \sqrt{a^2 \sqrt{a}}; \quad 2) \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a^5}}; \quad 3) \sqrt[4]{\sqrt[8]{2}}.$$

4. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{3^{-\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}}}{3^{-\frac{1}{12}}} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad 2) \left(a^{-\frac{5}{14}} b^{\frac{5}{7}} \right)^{1,4} \cdot \left(a^{\frac{1}{5}} b^{0,4} \right)^{-2,5}; \quad 3) \frac{\sqrt[3]{a} \cdot b^{\frac{5}{6}}}{a^{-\frac{5}{6}} \cdot (b^{-1,2})^{\frac{5}{18}}}.$$

5. Визначте, при яких значеннях змінної має зміст вираз:

$$1) \left(\frac{6-7x+x^2}{1-x} \right)^{\frac{2}{3}}; \quad 2) \frac{x^{\frac{1}{3}-0,(3)}}{x^{\frac{1}{3}}}; \quad 3) \frac{\sqrt[3]{x+2}}{(x+2)^{\frac{1}{3}}}.$$

6. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}}}; \quad 2) \frac{a-2+a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}; \quad 3) \frac{(\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3}{a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b + a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{2}}}.$$

7. Спростіть вираз:

$$1) \left(x^{\frac{1}{4}} + 3x^{\frac{3}{2}} \right)^2 - \sqrt{x} - 9x^3; \quad 2) \left(x^{\frac{1}{8}} + y^{\frac{1}{8}} \right) \left(x^{\frac{1}{8}} - y^{\frac{1}{8}} \right) (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y});$$

$$3) \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right) \left(x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right).$$

8. Використайте відповідні формули скороченого множення та подайте у вигляді добутку вираз:

$$1) a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{2}}; \quad 2) a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{2}}; \quad 3) a^{\frac{1}{4}} + 1.$$

9. Спростіть вираз:

$$1) \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - 3} + \frac{x}{9-x} - \frac{3}{x^{\frac{1}{2}} + 3}; \quad 2) \left(\frac{x}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y} - \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right) : \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}};$$

$$3) \left(\frac{x - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 1} - 2\sqrt[3]{x} + 1 \right) \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}} + 1}{1 - x^{\frac{2}{3}}}.$$

10. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x-1)^{-\frac{2}{5}} = 4; \quad 2) x^{0,8} \cdot x^{1,2} - x^{0,8} \cdot x^{0,2} - 2 = 0; \quad 3) 2x^{\frac{4}{3}} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20.$$

11. Оцініть значення виразу, за умови, що $256 \leq x < 729$:

$$1) x^{0,75}; \quad 2) 4x^{0,5} - 5x^{0,25}; \quad 3) \sqrt[4]{x^{0,5}} + 2x^{-\frac{1}{4}}.$$

12. Знайдіть усі значення змінної x , що задовольняють рівність:

$$1) \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}; \quad 2) \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}; \quad 3) \sqrt[5]{x} = -(-x)^{\frac{1}{5}}.$$

Рівень С

1. Подайте у вигляді степеня з основою x :

1) $\frac{x\sqrt{x^3\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3\sqrt{x^2}}}$;

2) $\frac{x^2\sqrt{x^2\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{x\sqrt{x}}}$;

3) $\left(\sqrt[6]{x^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x}}\right)^{-0,5}$.

2. З'ясуйте, чи може значення виразу $\left(\frac{0,5x^{\frac{1}{4}}}{(2-x)^{0,75}} + \frac{(2-x)^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{3}{4}}}{2}\right) : (2x-x^2)^{0,25}$ дорівнювати:

1) 0;

2) 1;

3) $-\frac{1}{3}$.

3. Доведіть, що числове значення виразу $\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-0,5} \cdot 10^{-3} + 10000^{-0,75}\right)^{\frac{1}{2}}$ є коренем рівняння $110x^2 - 21x + 1 = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння $\left(x^{\frac{8}{3}} - 2x^2\right)^{\frac{1}{3}} - 2\left(x^{\frac{2}{3}} - 2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{81}$ методом розкладання на множники.

5. При якому значенні параметра a рівняння $x^2\sqrt[3]{x^2} - (a+2)x^{\frac{4}{3}} + 2a = 0$ має єдиний розв'язок?

6. Розв'яжіть рівняння $x^{3,2} + (2a-3)x^5\sqrt{x^3} - 6a = 0$ в залежності від значень параметра a .

Рефлексія

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-
- 3) У мене залишилися запитання щодо
-
-

Можливі теми проєктів

1. Історія виникнення степенів із дробовим показником.
2. Степені в природі: закони росту.
3. Обчислення степенів із дробовими показниками на комп'ютері.
4. Степені в техніці та в архітектурі.







