

Урок 9. Урок–практикум. Перетворення виразів зі степенями з раціональними показниками

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) відпрацюєте вміння та навички щодо застосування означення степеня з дробовим показником;
- 2) відпрацюєте вміння та навички знаходження ОДЗ ірраціональних виразів;
- 3) відпрацюєте застосування властивостей степенів із раціональними показниками;
- 4) відпрацюєте перетворення ірраціональних виразів, що містять одночасно степені з раціональними показниками та корені n -го степеня;
- 5) застосуєте набуті знання, вміння та навички для розв'язання прикладної задачі.

II. Фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Знайдіть значення виразу $25^{\frac{1}{4}} \cdot \left(5^{-\frac{1}{6}}\right)^{-3}$.
2. Замініть арифметичний корінь степенем із дробовим показником: $\sqrt[11]{2x^2}$.
3. Скоротіть дріб: $\frac{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{4}}}$.
4. Подайте степені з раціональними показниками, використовуючи корені: $-2^{0,25}x^{-1}$.
5. Спростіть вираз $\left(x^{\frac{1}{8}} + y^{\frac{1}{8}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}} - y^{\frac{1}{8}}\right)\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right)$.

Завдання для обговорення

- Знайдіть усі значення змінної x , що задовольняють рівність: $\sqrt[5]{x} = -(-x)^{\frac{1}{5}}$.
Треба врахувати ОДЗ степеня з додатним дробовим показником.
- При якому значенні параметра a рівняння $x^2\sqrt[3]{x^2} - (a+2)x^{\frac{4}{3}} + 2a = 0$ має єдиний розв'язок?
Варто подати перший доданок у вигляді $x^{\frac{8}{3}}$, а після заміни змінної $y = x^{\frac{4}{3}}$ перетворити рівняння на квадратне.
- Розв'яжіть систему у невід'ємних числах:
$$\begin{cases} 2x^3 + 27y^3 = 9x^2y; \\ x^2 - xy + y^2 = 28. \end{cases}$$

Варто використати нерівність Коші для трьох виразів $x^3, x^3, 27y^3$ і отримати, що вона має, згідно з першим рівнянням системи, перетворитися на рівність і відповідно $x = 3y$.

III. Робота в парах над обчисленням значень степеневих виразів із раціональними показниками

Показник степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
n — натуральне число	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$. $a^1 = a$.	$a \in \mathbb{R}$	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, $-2^1 = -2$.
n — від'ємне ціле число	$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{-n}}$. $a^{-1} = \frac{1}{a}$.	$a \neq 0$	$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} =$ $= \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{81}$.
$n = 0$	$a^0 = 1$.	$a \neq 0$	$(-\pi)^0 = 1$.
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне додатне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$).	$a \geq 0$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$, $0^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{0^3} = \sqrt[4]{0} = 0$.
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне від'ємне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ ($m = -k, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$).	$a > 0$	$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

Дії зі степенями	Формула $a, b > 0$ $p, q \in \mathbb{Q}$	Приклади
Множення степенів	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = x^{\frac{8}{12} + \frac{9}{12}} = x^{\frac{17}{12}}$.

Дії зі степенями	Формула $a, b > 0$ $p, q \in \mathbb{Q}$	Приклади
Ділення степенів	$a^p : a^q = a^{p-q}$	$x^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}} = x^{\frac{5-6}{15}} = x^{-\frac{1}{15}}.$
Піднесення степеня до степеня	$(a^p)^q = a^{pq}$	$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{15}{2}} = x^{\frac{1 \cdot 15}{5 \cdot 2}} = x^{\frac{15}{10}} = x^{\frac{3}{2}}.$
Піднесення добутку до степеня	$(ab)^p = a^p b^p$	$\left(x^{\frac{1}{5}} y^{0,1}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10} \cdot \left(y^{0,1}\right)^{10} = x^2 y^1 = x^2 y.$
Піднесення частки до степеня	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{x^{\frac{1}{5}}}{y^{\frac{3}{4}}}\right)^{10} = \frac{\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10}}{\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^{10}} = \frac{x^2}{y^{\frac{15}{2}}}.$
Піднесення до степенів з протилежними показниками	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}.$

Завдання для роботи в парах

- Знайдіть значення виразу $\left(27^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}.$
- Обчисліть: $\left(\frac{16^{\frac{2}{3}} \cdot 25^{\frac{2}{3}}}{4^{-\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{1}{9}}}\right)^{-2}.$
- Знайдіть значення ірраціонального виразу $64^{-\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1,5} + 12^0 \cdot 4.$
- Знайдіть та виправте помилки у розв'язанні наступного завдання: обчисліть значення виразу $\left(\sqrt[3]{-25}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[3]{-5}\right)^{11}.$

Розв'язання. Перетворимо перший множник:

$$\left(\sqrt[3]{-25}\right)^5 = (-25)^{\frac{5}{3}} = (-1 \cdot 5^2)^{\frac{5}{3}} = -(5^2)^{\frac{5}{3}} = -5^{\frac{10}{3}}.$$

Перетворимо другий множник: $\left(\sqrt[3]{-5}\right)^{11} = (-5)^{\frac{11}{3}} = -5^{\frac{11}{3}}.$

Тоді отримуємо: $\left(\sqrt[3]{-25}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[3]{-5}\right)^{11} = -5^{\frac{10}{3}} \cdot \left(-5^{\frac{11}{3}}\right) = 5^{\frac{10}{3}} \cdot 5^{\frac{11}{3}} = 5^{\frac{21}{3}} = 5^7 = 78125.$

Відповідь. 78125.

5. Заповніть пропуски у наступному розв'язанні завдання на спрощення та обчислення значення виразу $\frac{a^3+b^3}{a+b} - (a^2+b^2)$ при $a = 4^{\frac{7}{4}}$; $b = 2^{\frac{1}{2}}$.

Розв'язання. Перетворимо спочатку дріб, використовуючи формулу

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} = \frac{(a+b)(\dots\dots\dots)}{a+b} = \dots\dots\dots$$

Тепер перетворимо весь вираз:

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} - (a^2+b^2) = \dots\dots\dots - a^2 - b^2 = -\dots\dots\dots$$

Підставимо значення змінних $a = 4^{\frac{7}{4}} = 2^{\frac{7}{2}}$; $b = 2^{\frac{1}{2}}$, отримаємо:

.....

Відповідь.

IV. Робота в малих групах над спрощенням виразів, що містять степені з раціональними показниками

Завдання для роботи в групах

1. Спростіть вираз $\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} + \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y}}{\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y}}$. При яких значеннях змінних виконані перетворення є рівносильними?
2. Запишіть формулу залежності між змінними a та b , за умови: $a = (t-1)^{\frac{2}{3}}$, $b = (t-1)^{\frac{2}{3}}$. При яких значеннях параметра t буде правильною отримана формула?
3. Знайдіть ОДЗ та сппростіть вираз $\left(0,00032a^{-\frac{1}{3}}b^2c^{-\frac{5}{6}}\right)^{0,4} \cdot \left(\frac{1}{125}a^{-0,2}b^{1,2}c\right)^{-\frac{2}{3}}$.
4. Знайдіть, при яких значеннях змінної будуть рівносильними виконані перетворення:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{3a^{\frac{1}{3}} - 1}{a + 1}\right) : \frac{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} + 1\right) - \left(3a^{\frac{1}{3}} - 1\right)}{\left(a^{\frac{1}{3}} + 1\right) \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1\right)} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot (a + 1)}{a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} - 1\right)} =$$
$$= \frac{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}} + 1}{a^{\frac{1}{3}} - 1} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} - 1\right)^2}{a^{\frac{1}{3}} - 1} = a^{\frac{1}{3}} - 1 = \sqrt[3]{a} - 1.$$

5. Оцініть, чи на всій області допустимих значень початкового ірраціонального виразу буде правильним наведене перетворення. Як виконати аналогічні дії для інших значень змінної?

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^7}}\right)^{11} = \left(\left(x^{\frac{7}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{11} = x^{\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 11} = x^{\frac{77}{15}}.$$

V. Самостійна робота

- 1.** Скоротіть дріб $\frac{a-25}{a^{0,5}+5}$.

А	Б	В	Г	Д
$a^{0,5} + 5$	$a^{0,5} - 5$	$\frac{1}{a^{0,5} - 5}$	$\frac{1}{a^{0,5} + 5}$	інша відповідь

[illegible]

- 2.** Спростіть вираз $\sqrt[7]{2^{14} \cdot 3^8}$.

А	Б	В	Г	Д
$2^{21} \cdot 3^{15}$	$2^7 \cdot 3^{\frac{8}{7}}$	$2^2 \cdot 3^{\frac{8}{7}}$	$2^2 \cdot 3^{\frac{7}{8}}$	інша відповідь

[illegible]

- 3.** Знайдіть вираз, тотожно рівний виразу $\frac{1 - a^{\frac{3}{2}}}{1 + a^{\frac{1}{2}} + a} + 2a^{0.5}$.

А	Б	В	Г	Д
$1 + \sqrt{a}$	$1 + 2\sqrt{a}$	$2\sqrt{a} - 1$	$(1 - \sqrt{a})^2$	інша відповідь

[illegible]

- 4.** Обчисліть: $3^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{2} - 48^{\frac{1}{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt[3]{6}-6$	$4\sqrt[3]{6}$	0	$\sqrt[3]{6}$	інша відповідь

[illegible]

- 5.** Знайдіть значення виразу $\left(\frac{\sqrt[4]{x} + 4}{x^{0,25} - 4} + \frac{x^{0,25} - 4}{\sqrt[4]{x} + 4} \right) : \frac{4x^{0,5} + 64}{16 - \sqrt{x}}$.

А	Б	В	Г	Д
---	---	---	---	---

Можливі теми проєктів

1. Степені з раціональними показниками у завданнях ЗНО/НМТ.
2. Використання властивостей степенів в олімпіадних та конкурсних завданнях.
3. Застосування степенів із раціональними показниками для розв'язування задач з біології та хімії.







