



Тема 1. Корені n -го степеня

Урок 9. Урок–практикум. Перетворення виразів зі степенями з раціональними показниками

Тип уроку: формування вмінь та навичок.

План уроку

1. Фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в парах над обчисленням значень степеневих виразів з раціональними показниками.
3. Робота в малих групах над спрощенням виразів, що містять степені з раціональними показниками.
4. Самостійна робота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте задачу на використання властивостей степенів із раціональними показниками. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 2) На початку уроку запропонуйте учням письмову перевірку відповідей до нескладних номерів домашнього завдання. За необхідності, зробіть аналіз деяких із запропонованих завдань. Обговоріть фронтально «ідейні» задачі домашнього завдання. За необхідності, використовуйте опитування біля дошки або інші форми роботи.
- 3) Учні/учениці поділяються на пари і працюють над наступною серією завдань. Учитель виступає у ролі консультанта та радника. Важливим елементом роботи є набуття навичок самоперевірки та взаємоперевірки.

- 4) Об'єднуємо клас у кілька груп (4 – 6 груп). Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 5) Запропонуйте учням та ученицям самостійну роботу у форматі завдань ЗНО/НМТ для визначення рівня сформованості вмінь та навичок розв'язання завдань із степенями з раціональними показниками.
- 6) Під час розв'язування практичної задачі об'єднуємо учнів та учениць у групи. Учнівство розвиває навички комунікації та командної роботи під час розв'язування практичної задачі.
- 7) Основна мета уроку — закріплення умінь та навичок щодо обчислення та застосування степеневих виразів із раціональними показниками.
- 8) Важливо постійно акцентувати увагу на ОДЗ степеневих виразів із раціональними показниками, при різних значеннях показника степеня.
- 9) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язувати обраний на занятті рівень тренувальних вправ або розв'язати інший рівень, або розв'язати окремі завдання з усіх рівнів (оберіть для учнів схему, що відповідає засвоєнню ними теми на уроку та інших індивідуальних чинників). Зверніть їхню увагу на завдання практичного змісту.
- 11) Акцентуйте увагу учнів/учениць на важливості створення проєктів, які можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми.

I. Організаційна частина (2 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Біологи помітили, що площа поверхні тіла тварини S (у см^2) залежить від її маси m (у грамах) за формулою $S = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$, де k — коефіцієнт, що залежить від форми тіла тварини. Нехай для певного виду тварин $k = 4$. Знайдіть площу поверхні тіла тварини з масою 8 кг. У скільки разів збільшиться площа поверхні, якщо маса зросте у 8 разів? Поясніть, який сенс має показник $\frac{2}{3}$ у формулі зв'язку між масою та площею поверхні тіла тварини.

II. Фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Знайдіть значення виразу $25^{\frac{1}{4}} \cdot \left(5^{-\frac{1}{6}}\right)^{-3}$.
2. Замініть арифметичний корінь степенем із дробовим показником: $\sqrt[11]{2x^2}$.

3. Скоротіть дріб: $\frac{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{4}}}$.
4. Подайте степені з раціональними показниками, використовуючи корені: $-2^{0,25}x^{-1}$.
5. Спростіть вираз $\left(x^{\frac{1}{8}} + y^{\frac{1}{8}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}} - y^{\frac{1}{8}}\right)(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})$.
- Відповідь. 1) 5; 2) $(2x^2)^{\frac{1}{11}} = 2^{\frac{1}{11}} \cdot |x|^{\frac{2}{11}}$; 3) $a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{4}}$; 4) $-\frac{\sqrt[4]{2}}{x}$; 5) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Завдання для обговорення

1. Знайдіть усі значення змінної x , що задовольняють рівність: $\sqrt[5]{x} = -(-x)^{\frac{1}{5}}$.
Треба врахувати ОДЗ степеня з додатним дробовим показником.
Відповідь. $x \in (-\infty; 0]$.
2. При якому значенні параметра a рівняння $x^2\sqrt[3]{x^2} - (a+2)x^{\frac{4}{3}} + 2a = 0$ має єдиний розв'язок?
Варто подати перший доданок у вигляді $x^{\frac{8}{3}}$, а після заміни змінної $y = x^{\frac{4}{3}}$ перетворити рівняння на квадратне.
Відповідь. $a \in (-\infty; 0) \cup \{2\}$.
3. Розв'яжіть систему у невід'ємних числах: $\begin{cases} 2x^3 + 27y^3 = 9x^2y; \\ x^2 - xy + y^2 = 28. \end{cases}$
Варто використати нерівність Коші для трьох виразів $x^3, x^3, 27y^3$ і отримати, що вона має, згідно з першим рівнянням системи, перетворитися на рівність і відповідно $x = 3y$.
Відповідь. (6; 2).

III. Робота в парах над обчисленням значень степеневих виразів із раціональними показниками

Показник степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
n — натуральне число	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ $a^1 = a$.	$a \in \mathbb{R}$	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, $-2^1 = -2$.
n — від'ємне ціле число	$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{-n}}$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$.	$a \neq 0$	$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} =$ $= \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{81}$.
$n = 0$	$a^0 = 1$.	$a \neq 0$	$(-\pi)^0 = 1$.

Показник степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне додатне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$).	$a \geq 0$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4,$ $0^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{0^3} = \sqrt[4]{0} = 0.$
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне від'ємне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ ($m = -k, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$).	$a > 0$	$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$

Дії зі степенями	Формула $a, b > 0$ $p, q \in \mathbb{Q}$	Приклади
Множення степенів	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = x^{\frac{8}{12} + \frac{9}{12}} = x^{\frac{17}{12}}.$
Ділення степенів	$a^p : a^q = a^{p-q}$	$x^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}} = x^{\frac{5}{15} - \frac{6}{15}} = x^{-\frac{1}{15}}.$
Піднесення степеня до степеня	$(a^p)^q = a^{pq}$	$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{15}{2}} = x^{\frac{1}{5} \cdot \frac{15}{2}} = x^{\frac{15}{10}} = x^{\frac{3}{2}}.$
Піднесення добутку до степеня	$(ab)^p = a^p b^p$	$\left(x^{\frac{1}{5}} y^{0,1}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10} \cdot (y^{0,1})^{10} = x^2 y^1 = x^2 y.$
Піднесення частки до степеня	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{x^{\frac{1}{5}}}{y^{\frac{3}{4}}}\right)^{10} = \frac{\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10}}{\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^{10}} = \frac{x^2}{y^{\frac{15}{2}}}.$
Піднесення до степенів з протилежними показниками	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}.$

Завдання для роботи в парах

- Знайдіть значення виразу $\left(27^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}.$
- Обчисліть: $\left(\frac{16^{\frac{2}{3}} \cdot 25^{\frac{2}{3}}}{4^{-\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{1}{9}}}\right)^{-2}.$
- Знайдіть значення ірраціонального виразу $64^{-\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1,5} + 12^0 \cdot 4.$

4. Знайдіть та виправте помилки у розв'язанні наступного завдання: обчисліть значення виразу $(\sqrt[3]{-25})^5 \cdot (\sqrt[3]{-5})^{11}$.

Розв'язання. Перетворимо перший множник:

$$(\sqrt[3]{-25})^5 = (-25)^{\frac{5}{3}} = (-1 \cdot 5^2)^{\frac{5}{3}} = -(5^2)^{\frac{5}{3}} = -5^{\frac{10}{3}}.$$

Перетворимо другий множник:

$$(\sqrt[3]{-5})^{11} = (-5)^{\frac{11}{3}} = -5^{\frac{11}{3}}.$$

Тоді отримуємо:

$$(\sqrt[3]{-25})^5 \cdot (\sqrt[3]{-5})^{11} = -5^{\frac{10}{3}} \cdot \left(-5^{\frac{11}{3}}\right) = 5^{\frac{10}{3}} \cdot 5^{\frac{11}{3}} = 5^{\frac{21}{3}} = 5^7 = 78125.$$

Відповідь. 78125.

5. Заповніть пропуски у наступному розв'язанні завдання на спрощення та обчислення значення виразу $\frac{a^3 + b^3}{a + b} - (a^2 + b^2)$ при $a = 4^{\frac{7}{4}}$; $b = 2^{\frac{1}{2}}$.

Розв'язання.

Перетворимо спочатку дріб, використовуючи формулу

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = \frac{(a + b)(\dots)}{a + b} = \dots$$

Тепер перетворимо весь вираз:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} - (a^2 + b^2) = \dots - a^2 - b^2 = -\dots$$

Підставимо значення змінних $a = 4^{\frac{7}{4}} = 2^{\dots}$; $b = 2^{\frac{1}{2}}$, отримаємо:

.....

Відповідь.

IV. Робота в малих групах над спрощенням виразів, що містять степені з раціональними показниками

Завдання для роботи в групах

- Спростіть вираз $\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} + \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y}}{\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y}}$. При яких значеннях змінних виконані перетворення є рівносильними?
- Запишіть формулу залежності між змінними a та b , за умови: $a = (t - 1)^{\frac{2}{3}}$, $b = (t - 1)^{\frac{2}{3}}$. При яких значеннях параметра t буде правильною отримана формула?
- Знайдіть ОДЗ та сппростіть вираз $\left(0,00032a^{-\frac{1}{3}}b^2c^{-\frac{5}{6}}\right)^{0,4} \cdot \left(\frac{1}{125}a^{-0,2}b^{1,2}c\right)^{-\frac{2}{3}}$.

- 4.** Знайдіть, при яких значеннях змінної будуть рівносильними виконані перетворення:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{3a^{\frac{1}{3}} - 1}{a + 1} \right) \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} + 1 \right) - \left(3a^{\frac{1}{3}} - 1 \right)}{\left(a^{\frac{1}{3}} + 1 \right) \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1 \right)} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot (a + 1)}{a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} - 1 \right)} = \\ & = \frac{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}} + 1}{a^{\frac{1}{3}} - 1} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} - 1 \right)^2}{a^{\frac{1}{3}} - 1} = a^{\frac{1}{3}} - 1 = \sqrt[3]{a} - 1. \end{aligned}$$

- 5.** Оцініть, чи на всій області допустимих значень початкового ірраціонального виразу буде правильним наведене перетворення. Як виконати аналогічні дії для інших значень змінної?

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^7}} \right)^{11} = \left(\left(x^{\frac{7}{5}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{11} = x^{\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 11} = x^{\frac{77}{15}}.$$

V. Самостійна робота

- 1.** Скоротіть дріб $\frac{a-25}{a^{0,5}+5}$.

А	Б	В	Г	Д
$a^{0,5} + 5$	$a^{0,5} - 5$	$\frac{1}{a^{0,5} - 5}$	$\frac{1}{a^{0,5} + 5}$	інша відповідь

[illegible]

- 2.** Спростіть вираз $\sqrt[7]{2^{14} \cdot 3^8}$.

А	Б	В	Г	Д
$2^{21} \cdot 3^{15}$	$2^7 \cdot 3^{\frac{8}{7}}$	$2^2 \cdot 3^{\frac{8}{7}}$	$2^2 \cdot 3^{\frac{7}{8}}$	інша відповідь

[illegible]

3. Знайдіть вираз, тотожно рівний виразу $\frac{1-a^{\frac{3}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}+a} + 2a^{0,5}$.

А	Б	В	Г	Д
$1+\sqrt{a}$	$1+2\sqrt{a}$	$2\sqrt{a}-1$	$(1-\sqrt{a})^2$	інша відповідь

4. Обчисліть: $3^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{2} - 48^{\frac{1}{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt[3]{6}-6$	$4\sqrt[3]{6}$	0	$\sqrt[3]{6}$	інша відповідь

5. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{\sqrt[4]{x}+4}{x^{0,25}-4} + \frac{x^{0,25}-4}{\sqrt[4]{x}+4} \right) : \frac{4x^{0,5}+64}{16-\sqrt{x}}$.

А	Б	В	Г	Д
-0,5	0,5	-2	2	інша відповідь

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Біологи помітили, що площа поверхні тіла тварини S (у см^2) залежить від її маси m (у грамах) за формулою $S = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$, де k — коефіцієнт, що залежить від форми тіла тварини. Нехай для певного виду тварин $k = 4$. Знайдіть площу поверхні тіла тварини з масою 8 кг. У скільки разів збільшиться площа поверхні, якщо маса зросте у 8 разів? Поясніть, який сенс має показник $\frac{2}{3}$ у формулі зв'язку між масою та площею поверхні тіла тварини.

Розв'язання. Переведемо масу в грами: $m = 8000$ (г).

Тоді: $S = 4 \cdot 8000^{\frac{2}{3}} = 4 \cdot \sqrt[3]{8000^2} = 4 \cdot \left(\sqrt[3]{8000} \right)^2 = 1600$ (см^2).

Якщо маса зросте у 8 разів, то площа поверхні зміниться наступним чином:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{k \cdot m_2^{\frac{2}{3}}}{k \cdot m_1^{\frac{2}{3}}} = \frac{(8m_1)^{\frac{2}{3}}}{m_1^{\frac{2}{3}}} = \frac{4m_1^{\frac{2}{3}}}{m_1^{\frac{2}{3}}} = 4, \text{ тобто в 4 рази.}$$

Якщо тіло збільшується в розмірах у n разів, то його об'єм та маса збільшуються в n^3 разів, а площа поверхні – в n^2 разів. Тому розміри тіла пропорційні до $\sqrt{S}$, і в той самий час пропорційні до $\sqrt[3]{m}$. Отже, $\sqrt{S}$ пропорційно до $\sqrt[3]{m}$, а відповідно S пропорційно до $(\sqrt[3]{m})^2 = m^{\frac{2}{3}}$.

Відповідь. 1600 см²; в 4 рази.

VII. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я вмію застосовувати означення степеня з дробовим показником. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію знаходити ОДЗ степенів із раціональними показниками. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію застосовувати властивості степенів для обчислення значень ірраціональних виразів. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію застосовувати властивості степенів для спрощення ірраціональних виразів зі змінними. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію перетворювати вирази, що містять степені та корені одночасно. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію ідею застосування коренів та степенів із раціональними показниками для розв'язування практичних задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Степені з раціональними показниками у завданнях ЗНО/НМТ.
2. Використання властивостей степенів в олімпіадних та конкурсних завданнях.
3. Застосування степенів із раціональними показниками для розв'язування задач з біології та хімії.