

Урок 10. Степенева функція з раціональним показником

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите означення степеневої функції з раціональним показником;
- 2) навчитеся будувати графіки степеневих функцій з різними дробовими показниками степенів;
- 3) повторите властивості функцій у цілому;
- 4) з'ясуєте властивості степеневої функції з дробовим показником;
- 5) зрозумієте застосування степеневої функції для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Нехай m і n — довільні дійсні числа, a — довільне додатне число, $a \neq 1$. До кожного початку речення (1 – 4) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (ЗНО, 2017 р.).

Початок речення

1 Якщо $(a^m)^n = a^4$, то2 Якщо $a^m \cdot a^n = a^4$, то3 Якщо $\sqrt[8]{a^m} = \sqrt{a^n}$, то4 Якщо $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^4}$, то

Закінчення речення

А $m + n = 4$.Б $m - n = 4$.В $mn = 4$.Г $m = 4n$.Д $m = 8n$.

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

2. Обчисліть: $\frac{2^{-1,6} \cdot 4^{4,8}}{8^{\frac{2}{3}}}$. (ЗНО, 2009 р.).

3. Обчисліть: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$.

4. Який показник степеня має вираз $\frac{x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}}$?

III. Означення степеневі функції з раціональним показником

Означення. Функцію $f(x) = x^q$, де q — раціональне число, яке не є цілим, називають **степеневі функцією з раціональним показником**.

1. Якщо q — дробове додатне число, яке менше від 1, то функція має вигляд $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$ тощо. Функція визначена для $x \in [0; +\infty)$.
Це зумовлено тим, що степінь x^q визначений для $x \geq 0$, якщо $q > 0$.
2. Якщо q — дробове додатне число, яке більше за 1, то функція має вигляд $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{5}{3}}$, $y = x^{\frac{7}{4}}$ тощо. Функція визначена для $x \in [0; +\infty)$.
3. Якщо q — дробове від'ємне число, то функція має вигляд $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$, $y = x^{-\frac{2}{5}}$ тощо. Функція визначена для $x \in (0; +\infty)$. Це зумовлено тим, що степінь x^q визначений для $x > 0$, якщо $p < 0$.

Проблемне запитання. Чи є функції $y = x^{\frac{1}{n}}$ і $y = \sqrt[n]{x}$ тотожними?

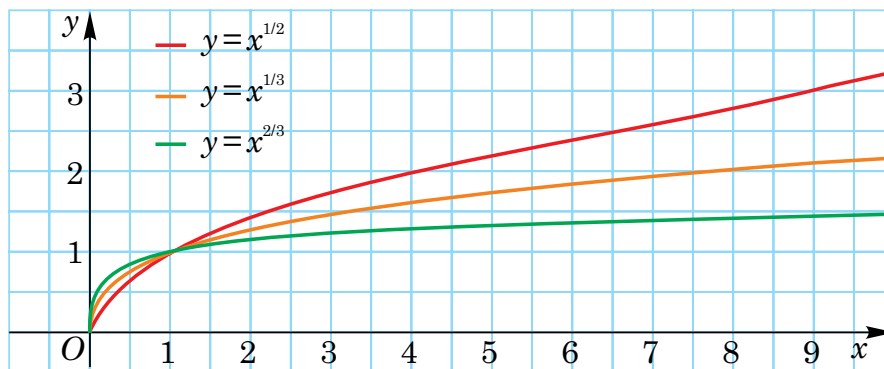
- 1) Функції $y = x^{\frac{1}{3}}$ та $y = \sqrt[3]{x}$ — різні функції, оскільки $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ виконується лише при $x \geq 0$. Однак корінь кубічний добувається з від'ємних чисел також. Зазначена відмінність між функціями $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = \sqrt[3]{x}$ правильна для всіх функцій виду $y = x^{\frac{1}{n}}$ і $y = \sqrt[n]{x}$, якщо n є непарним показником.
- 2) Якщо n — парне число, то функції $y = x^{\frac{1}{n}}$ і $y = \sqrt[n]{x}$ — тотожні.

Приклад 1. Які з функцій є степеневими функціями з раціональними показниками:

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $y = 2x^{\frac{1}{2}}$; | 2) $f(x) = 5x^3$; | 3) $y = -4x^{\frac{2}{3}}$; | 4) $y = 3\sqrt{x}$; |
| 5) $f(x) = 7x^{-1}$; | 6) $f(x) = x^{1,5}$; | 7) $y = \frac{2}{x}$; | 8) $y = 2x^{-\frac{5}{4}}$; |

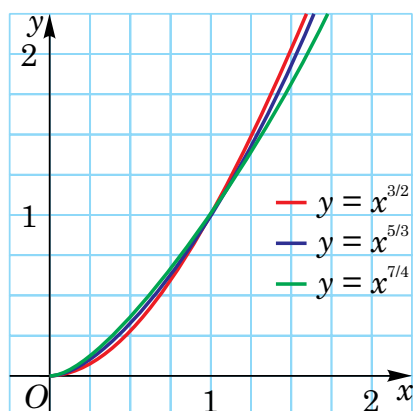
IV. Графіки степеневих функцій із раціональними показниками

1. q — дробове додатне число, яке менше від 1 (правильний дріб).
Наприклад, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$.



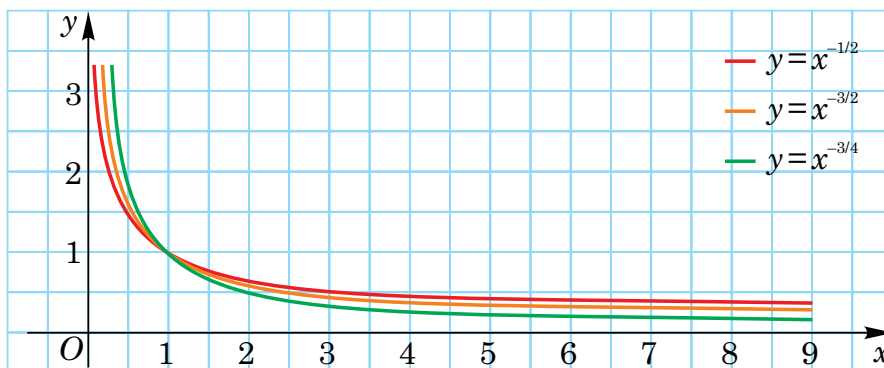
2. q — дробове додатне число, яке більше за 1 (неправильний дріб).

Наприклад, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{5}{3}}$, $y = x^{\frac{7}{4}}$.



3. q — дробове від'ємне число.

Наприклад, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$, $y = x^{-\frac{2}{5}}$.



V. Властивості степеневі функції з раціональним показником

№ п/п	Аналітичні властивості функції	Графічна ілюстрація властивостей функцій
1.	Область визначення, тобто множина значень аргументу, при яких задана функція.	Проекція графіка на вісь Ox .
2.	Нулі функції — точки, в яких функція перетворюється в 0, або корені рівняння $f(x) = 0$.	Точки перетину графіка з віссю Ox .

Приклад 4. Дано функцію $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$. Порівняйте:

1) $f(3)$ i $f(3,3)$;

2) $f(\sqrt{2})$ i $f(1,4)$.

[illegible]

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Закон Клейбера, або «метаболічний закон $\frac{3}{4}$ », — це біохімічне правило, яке

встановлює залежність між швидкістю основного обміну речовин і масою організму. Закон стверджує, що базальна метаболічна швидкість (BMR) для багатьох груп тварин визначається формулою: $B(m) = 70m^{0.75}$, де m — маса тварини в кілограмах, а $B(m)$ — базальна метаболічна швидкість, вимірювана в кілокалоріях на добу.

1. Обчисліть базальну метаболічну швидкість (BMR) для різних тварин і людини, маси яких наведені у таблиці.

Живий організм	Тварина						Людина
	Кажан	Білка	Єнот	Рись	Лось	Носоріг	
Маса (кг)	0,1	0,6	8	30	360	3500	70
BMR (ккал/ день)							

2. Побудуйте графік BMR для $0 < m \leq 400$.
3. Проаналізуйте: чи споживають більші тварини більше їжі відносно їхньої маси тіла, у порівнянні з меншими тваринами?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- 1.** Знайдіть значення функції:

1) $y = 2x^{\frac{2}{3}}$, якщо $x = 27$;

2) $y = x^{\frac{1}{2}}$, якщо $x = 9$;

3) $y = -x^{\frac{3}{2}}$, якщо $x = 4$;

4) $y = x^{\frac{2}{3}}$, якщо $x = 8$;

5) $y = x^{\frac{5}{4}}$, якщо $x = 16$;

6) $y = 3x^{\frac{1}{3}}$, якщо $x = 27$.

- 2.** Укажіть область визначення функції:

$$1) \ y = x^{\frac{1}{2}};$$

$$2) \ y = x^{\frac{2}{3}};$$

$$3) \ y = (x+1)^{\frac{5}{4}};$$

$$4) \ y = (3x - 1)^{\frac{1}{3}};$$

4) $y = (-x)^{\frac{1}{2}}$;

6) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

3. Обчисліть нулі функції:

1) $y = (x-1)^{\frac{1}{4}}$; 2) $y = (x+8)^{\frac{1}{2}}$; 3) $y = (3x-6)^{\frac{1}{3}}$;
4) $y = (x^2-4)^{\frac{1}{2}}$; 5) $y = (5-x)^{\frac{3}{2}}$; 6) $y = (2x+1)^{\frac{2}{3}}$.

4. Знайдіть значення функції $f(x)$ в точці x_0 , якщо:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, x_0 = 4$; 2) $f(x) = x^{\frac{5}{3}}, x_0 = 8$;
3) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}, x_0 = 4$; 4) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}, x_0 = 16$.

5. Яка з даних функцій визначена на множині всіх дійсних чисел:

1) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; 2) $f(x) = x^{-\frac{5}{2}}$; 3) $f(x) = x^{\frac{7}{5}}$; 4) $f(x) = x^{-\frac{7}{4}}$.

6. Функцію задано формулою $g(x) = x^{\frac{4}{5}}$. Порівняйте:

1) $g(7)$ і $g(8)$; 2) $g(1,19)$ і $g(1,15)$.

Рівень В

1. Укажіть множину значень функції:

1) $y = x^{-2}$; 2) $y = x^{\frac{1}{3}}$; 3) $y = (x-5)^{\frac{2}{3}}$;
4) $y = -(x+1)^{\frac{1}{2}}$; 5) $y = (2x)^{\frac{3}{2}}$; 6) $y = |x|^{\frac{1}{2}}$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[6]{3x-2}$; 2) $y = \sqrt{x+2} - (5-x)^{\frac{1}{2}}$;
3) $y = \frac{(x+3)^{\frac{1}{4}}}{x-7}$; 4) $y = \sqrt[4]{\frac{2-x}{6x-3}}$.

3. Порівняйте числа:

1) $7^{1,2}$ і $7,2^{1,2}$; 2) $1,8^{-0,4}$ і $2^{-0,4}$; 3) $3^{\frac{1}{8}}$ і $2^{\frac{1}{8}}$; 4) 5^{-6} і $4,8^{-6}$.

4. Порівняйте вирази, якщо $\alpha > 0$:

1) $0,15^\alpha$ і $0,34^\alpha$; 2) $0,17^\alpha$ і $0,23^\alpha$; 3) $3,1^\alpha$ і $4,52^\alpha$; 4) $2,78^\alpha$ і $6,9^\alpha$.

5. Порівняйте вирази, якщо $0 < \alpha < 1$:

1) $0,47^\alpha$ і $0,51^\alpha$; 2) $0,39^\alpha$ і $0,42^\alpha$; 3) $3,14^\alpha$ і $4,73^\alpha$; 4) $9,2^\alpha$ і $11,38^\alpha$.

6. Яка з даних функцій зростає на інтервалі $(0; 1)$:

1) $f(x) = -x^4$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$; 3) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$; 4) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$.

Рівень С

1. Функцію задано формулою $y = x^\alpha$. Знайдіть α , якщо графік функції проходить через точку:

1) $A(13; 169)$; 2) $B(-64; -4)$; 3) $C(144; 12)$; 4) $D(-216; -6)$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x + 2)^{\frac{1}{2}}$; 2) $y = \left(\frac{x+3}{x-4}\right)^{\frac{1}{6}}$; 3) $y = (4-x)^{\frac{1}{5}}$; 4) $y = (2+x-x^2)^{0,25}$.

3. Функцію задано формулою $y = x^q$. Знайдіть q , якщо графік функції проходить через точку:

1) $B(16; 0,25)$; 2) $C\left(27; \frac{1}{9}\right)$; 3) $K\left(625; \frac{1}{5}\right)$; 4) $D\left(1024; \frac{1}{4}\right)$.

4. Оцініть значення функції $y = x^{\frac{5}{3}}$, якщо:

1) $0 \leq x \leq \frac{1}{27}$; 2) $0,001 < x < 0,125$; 3) $x \leq 64$; 4) $x \geq 3\frac{3}{8}$.

5. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{\frac{3}{2}}$ на проміжках:

1) $[0; 1]$; 2) $[1; 9]$; 3) $[16; +\infty)$.

6. Порівняйте властивості функцій $y = x^{\frac{2}{3}}$ і $y = x^{\frac{3}{2}}$. Складіть порівняльну таблицю.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

- 1.** Побудова графіків степеневих функцій за допомогою графічного калькулятора або комп'ютера.
- 2.** Використання степеневих функцій у фізиці, в біології та в економіці.

3. Дослідження поведінки функції при наближенні аргументу функції до нуля та до нескінченності.
4. Історія розвитку степеневих функцій: як з'явився дробовий показник?







