

10

Тема 2.

Степенева функція

Урок 10. Степенева функція з раціональним показником

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення степеневої функції з раціональним показником.
2. Властивості степеневої функції з раціональними показниками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює їхнє застосування, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово в процесі викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям розв'язати завдання на повторення, які найдоцільніші, на ваш вибір.
- 3) Сформулюйте життєву задачу без розв'язання. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло у вигляді схем та таблиць, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні.
- 5) Заохочуйте учнів/учениць до самостійного дослідження властивостей функцій та побудови їхніх графіків.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в межах одного уроку, тому обирайте його обсяг на власний розсуд.

7) Обов'язково сплануйте проведення останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичних задач і тренувальні вправи, оскільки вони важливі для формування практичних навичок і навчання учнів/учениць самостійної роботи.

6) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Пропонуйте можливі теми для створення проєктів.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Як можна знайти сторону квадрата за його площею?

2) Чи існує залежність між швидкостями перебігу хімічних реакцій та дробовими показниками степенів, що виражають концентрації речовин?

3) Чи використовуються степені з дробовими показниками для обчислення енергії у фізичних формулах?

4) Як за допомогою степеневих функцій із раціональними показниками моделюють зростання або спадання популяцій тварин?

5) Чи використовують у медицині для розрахунку дозування ліків на основі маси тіла степеневі залежності з дробовими показниками?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Нехай m і n — довільні дійсні числа, a — довільне додатне число, $a \neq 1$. До кожного початку речення (1 – 4) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (ЗНО, 2017 р.).

Початок речення

1 Якщо $(a^m)^n = a^4$, то

2 Якщо $a^m \cdot a^n = a^4$, то

3 Якщо $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt{a^n}$, то

4 Якщо $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^4}$, то

Закінчення речення

А $m + n = 4$.

Б $m - n = 4$.

В $mn = 4$.

Г $m = 4n$.

Д $m = 8n$.

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – В, 2 – А, 3 – Г, 4 – Б.

2. Обчисліть: $\frac{2^{-1,6} \cdot 4^{4,8}}{8^{\frac{2}{3}}}$. (ЗНО, 2009 р.).

Відповідь. 64.

3. Обчисліть: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$.

Відповідь. $2\frac{1}{3}$.

4. Який показник степеня має вираз $x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^5}$?

Відповідь. 0,75.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Закон Клейбера, або «метаболічний закон $\frac{3}{4}$ », — це біохімічне правило, яке

встановлює залежність між швидкістю основного обміну речовин і масою організму. Закон стверджує, що базальна метаболічна швидкість (BMR) для багатьох груп тварин визначається формулою: $B(m) = 70m^{0,75}$, де m — маса тварини в кілограмах, а $B(m)$ — базальна метаболічна швидкість, вимірювана в кілокалоріях на добу.

- Обчисліть базальну метаболічну швидкість (BMR) для різних тварин і людини, маси яких наведені у таблиці.

Живий організм	Тварина						Людина
	Кажан	Білка	Єнот	Рись	Лось	Носоріг	
Маса (кг)	0,1	0,6	8	30	360	3500	70
BMR (ккал/день)							

- Побудуйте графік BMR для $0 < m \leq 400$.
- Проаналізуйте: чи споживають більші тварини більше їжі відносно їхньої маси тіла, у порівнянні з меншими тваринами?

Джерело:

<https://yoshiwarabooks.org/mfg/Rational-Exponents.html>



III. Означення степеневої функції з раціональним показником

Означення. Функцію $f(x) = x^q$, де q — раціональне число, яке не є цілим, називають **степеневую функцією з раціональним показником**.

- Якщо q — дробове додатне число, яке менше від 1, то функція має вигляд $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$ тощо. Функція визначена для $x \in [0; +\infty)$.
Це зумовлено тим, що степінь x^q визначений для $x \geq 0$, якщо $q > 0$.
- Якщо q — дробове додатне число, яке більше за 1, то функція має вигляд $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{5}{3}}$, $y = x^{\frac{7}{4}}$ тощо. Функція визначена для $x \in [0; +\infty)$.

3. Якщо q — дробове від'ємне число, то функція має вигляд $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$, $y = x^{-\frac{2}{5}}$ тощо. Функція визначена для $x \in (0; +\infty)$. Це зумовлено тим, що степінь x^q визначений для $x > 0$, якщо $p < 0$.

Проблемне запитання. Чи є функції $y = x^{\frac{1}{n}}$ і $y = \sqrt[n]{x}$ тотожними?

- 1) Функції $y = x^{\frac{1}{3}}$ та $y = \sqrt[3]{x}$ — різні функції, оскільки $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ виконується лише при $x \geq 0$. Однак корінь кубічний добувається з від'ємних чисел також. Зазначена відмінність між функціями $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = \sqrt[3]{x}$ правильна для всіх функцій виду $y = x^{\frac{1}{n}}$ і $y = \sqrt[n]{x}$, якщо n є непарним показником.
- 2) Якщо n — парне число, то функції $y = x^{\frac{1}{n}}$ і $y = \sqrt[n]{x}$ — тотожні.

Ілюстративний приклад

5. Які з функцій є степеневими функціями з раціональними показниками:

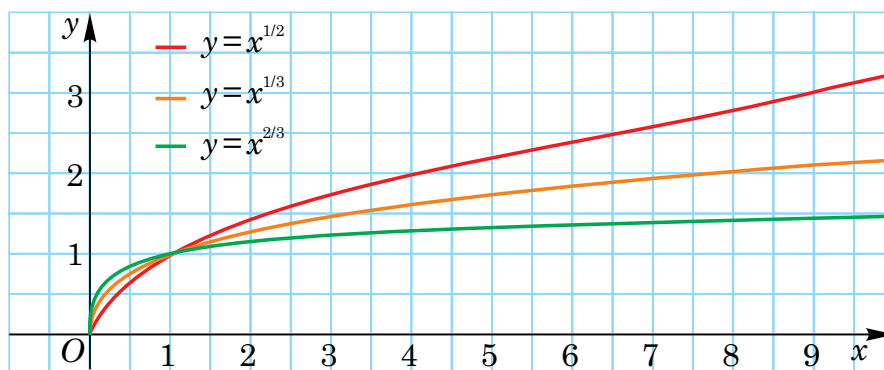
- 1) $y = 2x^{\frac{1}{2}}$; 2) $f(x) = 5x^3$; 3) $y = -4x^{\frac{2}{3}}$; 4) $y = 3\sqrt{x}$;
 5) $f(x) = 7x^{-1}$; 6) $f(x) = x^{1.5}$; 7) $y = \frac{2}{x}$; 8) $y = 2x^{-\frac{5}{4}}$?

Відповідь. 1), 3), 4), 6), 8).

IV. Графіки степеневих функцій із раціональними показниками

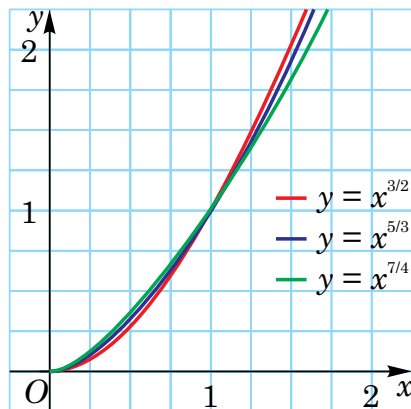
1. q — дробове додатне число, яке менше від 1 (правильний дріб).

Наприклад, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$.



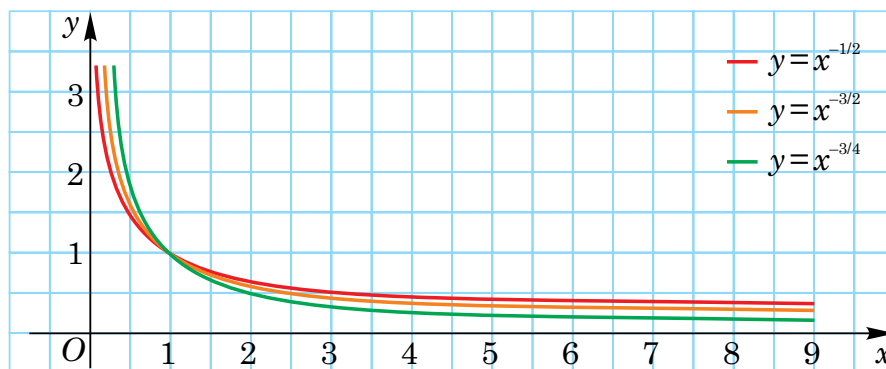
2. q — дробове додатне число, яке більше за 1 (неправильний дріб).

Наприклад, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{5}{3}}$, $y = x^{\frac{7}{4}}$.



3. q — дробове від'ємне число.

Наприклад, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$, $y = x^{-\frac{2}{5}}$.



Ілюстративний приклад

6. Чи проходить графік функції $y = x^{0,75}$ через точку (16; 8)?

Розв'язання. Якщо $x = 16$, то $y = 16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 8$.

Відповідь. Так.

V. Властивості степеневі функції з раціональним показником

№ п/п	Аналітичні властивості функції	Графічна ілюстрація властивостей функцій
1.	Область визначення, тобто множина значень аргументу, при яких задана функція.	Проекція графіка на вісь Ox .
2.	Нулі функції — точки, в яких функція перетворюється в 0, або корені рівняння $f(x) = 0$.	Точки перетину графіка з віссю Ox .
3.	Проміжки сталого знака, тобто проміжки, на яких функція додатна (від'ємна), або розв'язки нерівності $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).	Проміжки осі Ox , що відповідають точкам графіка, які лежать вище (нижче) від осі Ox .

№ п/п	Аналітичні властивості функції	Графічна ілюстрація властивостей функцій
4.	Парність або непарність функції, тобто виконання рівності $f(-x) = f(x)$ для парної функції та виконання рівності $f(-x) = -f(x)$ для непарної функції.	Графік парної функції симетричний відносно осі Oy . Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.
5.	Проміжки монотонності, тобто проміжки, на яких функція зростає або спадає.	Проміжки осі Ox , на яких графік прямує вгору або вниз.
6.	Область значень функції — множина чисел, яка складається з усіх значень функції.	Проекція графіка на вісь Oy .

Якщо q — дробове додатне число, яке менше від 1, тобто $y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^{\frac{1}{3}}, y = x^{\frac{2}{3}}$.

- 1) Функція визначена для невід'ємних значень $x, x \in [0; +\infty)$.
- 2) Функція набуває невід'ємних значень, тобто $y \in [0; +\infty)$.
- 3) Нулем функції є число 0 (точка перетину графіка функції Ox).
- 4) Функція зростає на всій області визначення.

Якщо q — дробове додатне число, яке більше за 1, тобто $y = x^{\frac{3}{2}}, y = x^{\frac{5}{3}}, y = x^{\frac{7}{4}}$.

- 1) Функція визначена для невід'ємних значень $x, x \in [0; +\infty)$.
- 2) Функція набуває невід'ємних значень, тобто $y \in [0; +\infty)$.
- 3) Нулем функції є число 0 (точка перетину графіка функції Ox).
- 4) Функція зростає на всій області визначення.

Якщо q — дробове від'ємне число, тобто $y = x^{-\frac{1}{2}}, y = x^{-\frac{1}{3}}, y = x^{-\frac{2}{5}}$.

- 1) Функція визначена для додатних значень $x, x \in (0; +\infty)$.
- 2) Функція набуває додатних значень, тобто $y \in (0; +\infty)$.
- 3) Нулів функції немає (графік вісь абсцис не перетинає).
- 4) Функція спадає на всій області визначення.

Ілюстративні приклади

- 7.** Обчисліть значення функції $f(x) = -3x^{\frac{1}{3}}$, якщо $x = 27$.

Розв'язання. У формулу, що задає функцію, підставимо $x = 27$:

$$f(27) = -3 \cdot 27^{\frac{1}{3}} = -3 \cdot \sqrt[3]{27} = -3 \cdot 3 = 9.$$

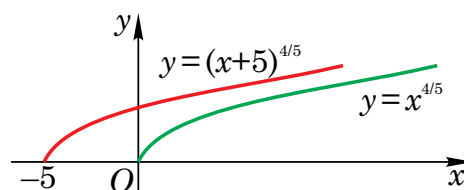
Відповідь. -9 .

- 8.** Знайдіть область визначення та множину значень функції $y = (x+5)^{\frac{4}{5}}$.

Розв'язання. Побудуємо схематично графік заданої функції. Для цього виконаємо паралельне перенесення графіка функції $y = x^{\frac{4}{5}}$ уздовж осі Ox на 5 одиниць ліворуч (див. рисунок).

Отже, $x \in [-5; +\infty)$. Множина значень функції $y \in [0; +\infty)$.

Відповідь. $x \in [-5; +\infty), y \in [0; +\infty)$.



9. Дано функцію $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$. Порівняйте:

1) $f(3)$ і $f(3,3)$;

2) $f(\sqrt{2})$ і $f(1,4)$.

Розв'язання. $D(f) = [0; +\infty)$.

Функція $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$ зростає на $D(f)$. Тому більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

1) Оскільки $3 < 3,3$, то $f(3) < f(3,3)$.

2) Оскільки $\sqrt{2} > 1,4$, то $f(\sqrt{2}) > f(1,4)$.

Відповідь. 1) $f(3) < f(3,3)$; 2) $f(\sqrt{2}) > f(1,4)$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Закон Клейбера, або «метаболічний закон $\frac{3}{4}$ », — це біохімічне правило, яке

встановлює залежність між швидкістю основного обміну речовин і масою організму. Закон стверджує, що базальна метаболічна швидкість (BMR) для багатьох груп тварин визначається формулою: $B(m) = 70m^{0,75}$, де m — маса тварини в кілограмах, а $B(m)$ — базальна метаболічна швидкість, вимірювана в кілокалоріях на добу.

- Обчисліть базальну метаболічну швидкість (BMR) для різних тварин і людини, маси яких наведені у таблиці.

Живий організм	Тварина						Людина
	Кажан	Білка	Єнот	Рись	Лось	Носоріг	
Маса (кг)	0,1	0,6	8	30	360	3500	70
BMR (ккал/день)							

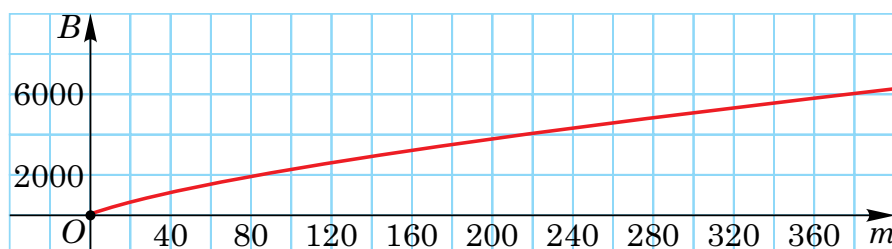
- Побудуйте графік BMR для $0 < m \leq 400$.
- Проаналізуйте: чи споживають більші тварини більше їжі відносно їхньої маси тіла, у порівнянні з меншими тваринами?

Розв'язання.

- Обчислимо значення BMR за формулою $B(m) = 70m^{0,7}$ і заповнимо таблицю:

Живий організм	Тварина						Людина
	Кажан	Білка	Єнот	Рись	Лось	Носоріг	
Маса (кг)	0,1	0,6	8	30	360	3500	70
BMR (ккал/день)	12,44	47,7	33,29	897,3	5785,28	31852,9	1694

2. Побудуємо графік функції $B(m) = 70m^{0,75}$, якщо $0 < m \leq 400$ (див. рисунок).



3. Якби споживання енергії було пропорційним до маси тіла, то графік був би прямою лінією. Але оскільки показник степеня $\frac{3}{4}$ у правилі Клейбера менший від 1, то більші тварини споживають менше їжі, ніж менші тварини, відносно своєї маси тіла.

Відповідь. Більші тварини споживають менше їжі відносно своєї маси тіла. Це ж твердження стосується людини.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть значення функції:

1) $y = 2x^{\frac{2}{3}}$, якщо $x = 27$;

2) $y = x^{\frac{1}{2}}$, якщо $x = 9$;

3) $y = -x^{\frac{3}{2}}$, якщо $x = 4$;

4) $y = x^{\frac{2}{3}}$, якщо $x = 8$;

5) $y = x^{\frac{5}{4}}$, якщо $x = 16$;

6) $y = 3x^{\frac{1}{3}}$, якщо $x = 27$.

2. Укажіть область визначення функції:

1) $y = x^{\frac{1}{2}}$;

2) $y = x^{\frac{2}{3}}$;

3) $y = (x+1)^{\frac{5}{4}}$;

4) $y = (3x-1)^{\frac{1}{3}}$;

4) $y = (-x)^{\frac{1}{2}}$;

6) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

3. Обчисліть нулі функції:

1) $y = (x-1)^{\frac{1}{4}}$;

2) $y = (x+8)^{\frac{1}{2}}$;

3) $y = (3x-6)^{\frac{1}{3}}$;

4) $y = (x^2-4)^{\frac{1}{2}}$;

5) $y = (5-x)^{\frac{3}{2}}$;

6) $y = (2x+1)^{\frac{2}{3}}$.

4. Знайдіть значення функції $f(x)$ в точці x_0 , якщо:

1) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $x_0 = 4$;

2) $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$, $x_0 = 8$;

3) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x_0 = 4$;

4) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, $x_0 = 16$.

5. Яка з даних функцій визначена на множині всіх дійсних чисел:

1) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$;

2) $f(x) = x^{-\frac{5}{2}}$;

3) $f(x) = x^{\frac{7}{5}}$;

4) $f(x) = x^{-\frac{7}{4}}$.

6. Функцію задано формулою $g(x) = x^{\frac{4}{5}}$. Порівняйте:

1) $g(7)$ і $g(8)$;

2) $g(1,19)$ і $g(1,15)$.

Рівень В

1. Укажіть множину значень функції:

- 1) $y = x^{-2}$; 2) $y = x^{\frac{1}{3}}$; 3) $y = (x - 5)^{\frac{2}{3}}$;
4) $y = -(x + 1)^{\frac{1}{2}}$; 5) $y = (2x)^{\frac{3}{2}}$; 6) $y = |x|^{\frac{1}{2}}$.

2. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt[6]{3x - 2}$; 2) $y = \sqrt{x + 2} - (5 - x)^{\frac{1}{2}}$;
3) $y = \frac{(x + 3)^{\frac{1}{4}}}{x - 7}$; 4) $y = \sqrt[4]{\frac{2 - x}{6x - 3}}$.

3. Порівняйте числа:

- 1) $7^{1,2}$ і $7,2^{1,2}$; 2) $1,8^{-0,4}$ і $2^{-0,4}$; 3) $3^{\frac{1}{8}}$ і $2^{\frac{1}{8}}$; 4) 5^{-6} і $4,8^{-6}$.

4. Порівняйте вирази, якщо $\alpha > 0$:

- 1) $0,15^\alpha$ і $0,34^\alpha$; 2) $0,17^\alpha$ і $0,23^\alpha$; 3) $3,1^\alpha$ і $4,52^\alpha$; 4) $2,78^\alpha$ і $6,9^\alpha$.

5. Порівняйте вирази, якщо $0 < \alpha < 1$:

- 1) $0,47^\alpha$ і $0,51^\alpha$; 2) $0,39^\alpha$ і $0,42^\alpha$; 3) $3,14^\alpha$ і $4,73^\alpha$; 4) $9,2^\alpha$ і $11,38^\alpha$.

6. Яка з даних функцій зростає на інтервалі $(0; 1)$:

- 1) $f(x) = -x^4$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$; 3) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$; 4) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$.

Рівень С

1. Функцію задано формулою $y = x^\alpha$. Знайдіть α , якщо графік функції проходить через точку:

- 1) $A(13; 169)$; 2) $B(-64; -4)$; 3) $C(144; 12)$; 4) $D(-216; -6)$.

2. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = (x + 2)^{\frac{1}{2}}$; 2) $y = \left(\frac{x + 3}{x - 4}\right)^{\frac{1}{6}}$; 3) $y = (4 - x)^{\frac{1}{5}}$; 4) $y = (2 + x - x^2)^{0,25}$.

3. Функцію задано формулою $y = x^q$. Знайдіть q , якщо графік функції проходить через точку:

- 1) $B(16; 0,25)$; 2) $C\left(27; \frac{1}{9}\right)$; 3) $K\left(625; \frac{1}{5}\right)$; 4) $D\left(1024; \frac{1}{4}\right)$.

4. Оцініть значення функції $y = x^{\frac{5}{3}}$, якщо:

- 1) $0 \leq x \leq \frac{1}{27}$; 2) $0,001 < x < 0,125$; 3) $x \leq 64$; 4) $x \geq 3\frac{3}{8}$.

5. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{\frac{3}{2}}$ на проміжках:

- 1) $[0; 1]$; 2) $[1; 9]$; 3) $[16; +\infty)$.

6. Порівняйте властивості функцій $y = x^{\frac{2}{3}}$ і $y = x^{\frac{3}{2}}$. Складіть порівняльну таблицю.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Побудова графіків степеневих функцій за допомогою графічного калькулятора або комп'ютера.
2. Використання степеневих функцій у фізиці, в біології та в економіці.
3. Дослідження поведінки функції при наближенні аргументу функції до нуля та до нескінченності.
4. Історія розвитку степеневих функцій: як з'явився дробовий показник?

Список використаних джерел

- 1) Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Київ: УОВЦ «Оріон», 2018. — 288 с.: іл.
- 2) Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с.
- 3) Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Харків: Вид-во «Ранок», 2018. — 272 с.: іл.
- 4) Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Київ: Генеза, 2018. — 448 с.: іл.