

**Урок 11. Графіки степеневих функцій
з раціональними показниками****РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) систематизуєте властивості степеневих функцій із раціональними показниками та їхні особливості;
- 2) навчитесь будувати графіки степеневих функцій;
- 3) розв'яжете завдання на визначення області визначення та множини значень степеневих функцій;
- 4) розв'яжете задачу практичного змісту на застосування степеневих функцій.

II. Повторення

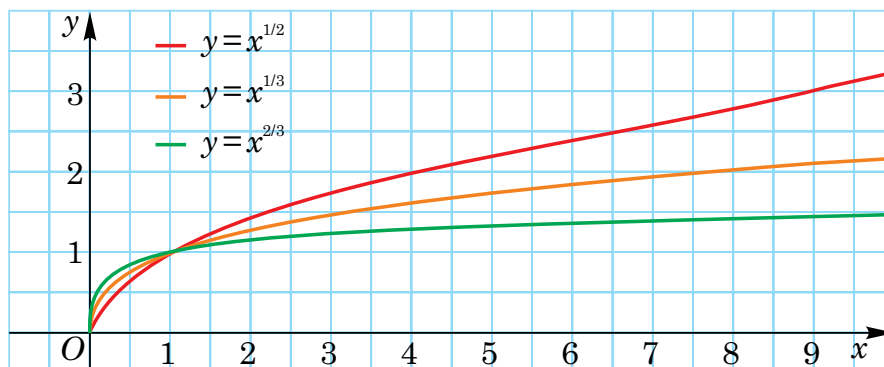
1. Обчисліть: $\frac{32^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}$.
2. Скоротіть дріб $\frac{b^{\frac{5}{6}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}} - 9c^{\frac{1}{2}}}$.
3. Обчисліть: $\left(81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}\right) : \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3,6}\right)$.
4. Розв'яжіть рівняння $4 = x^{\frac{2}{7}}$.

III. Графіки степеневі функції з раціональними показниками

Повторимо побудову графіків степеневі функції з дробовими показниками степенів.

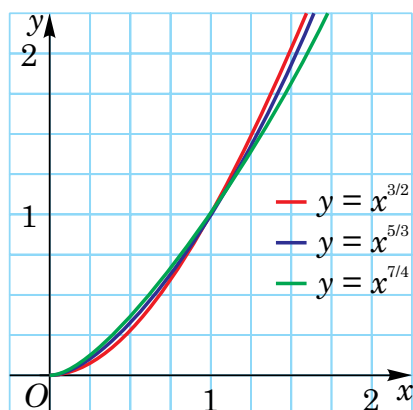
1. q — дробове додатне число, яке менше від 1 (правильний дріб).

Наприклад, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$.



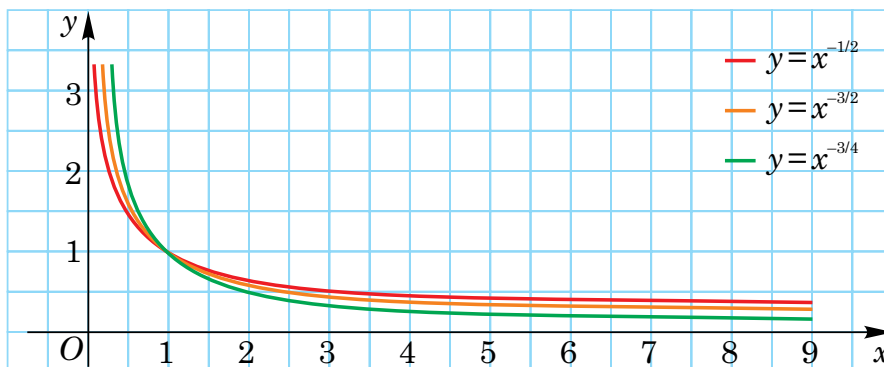
2. q — дробове додатне число, яке більше за 1 (неправильний дріб).

Наприклад, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{5}{3}}$, $y = x^{\frac{7}{4}}$.



3. q — дробове від'ємне число.

Наприклад, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$, $y = x^{-\frac{2}{5}}$.



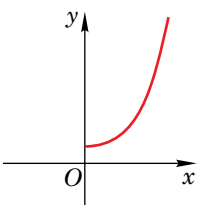
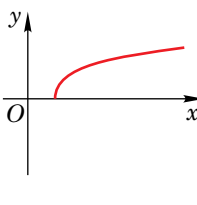
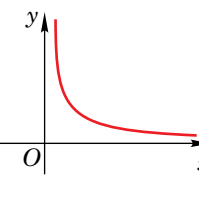
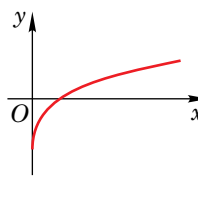
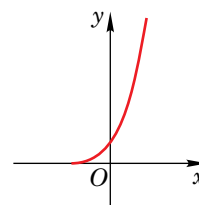
Опис графіка функції $y = kx^q$

У степеневій функції $y = kx^q$ коефіцієнт k впливає на розміщення графіка.

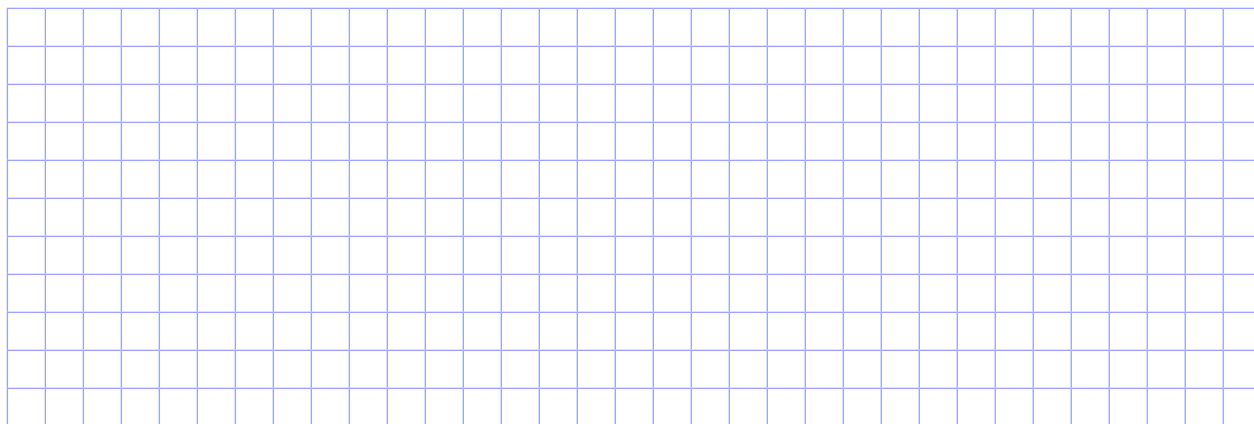
1. Якщо $(0 < k < 1)$, то графік притискається до осі абсцис.
Наприклад, якщо $k = 0,5$ то кожне значення функції зменшується вдвічі.
2. Якщо $k > 1$, то графік притискається до осі ординат.
Наприклад, якщо $k = 2$, то кожне значення функції подвоюється.
3. Якщо $k < 0$, то відбувається відображення графіка відносно осі x .
Усі додатні значення стають від'ємними, і навпаки.

Приклад 1. Установіть відповідність між функцією (1–4) та ескізом графіка (А–Д) функції.

- 1) $y = x^{\frac{1}{2}} - 1$; 2) $y = x^{\frac{3}{2}} + 1$; 3) $y = (x - 1)^{\frac{1}{2}}$; 4) $y = (x + 1)^{\frac{5}{2}}$.

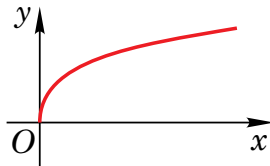
А	Б	В	Г	Д
				

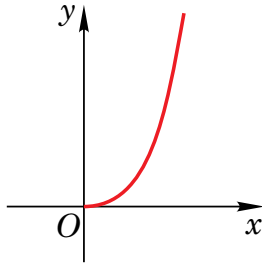
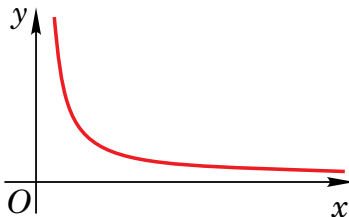
Приклад 2. Побудуйте графік функції $f(x) = (x - 3)^{\frac{1}{4}} - 2$. Укажіть нулі функції.



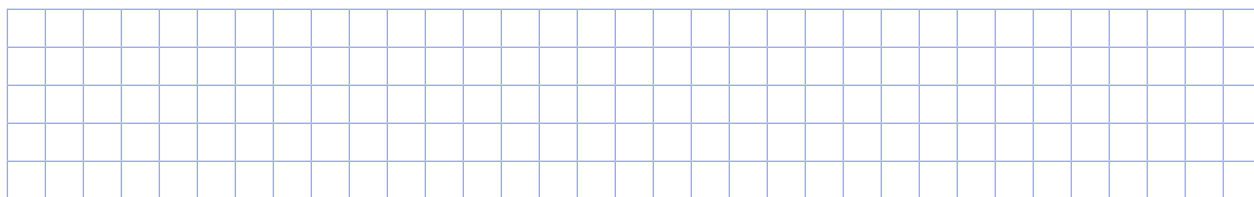
IV. Узагальнення властивостей степеневих функцій з дробовими показниками

Узагальнимо властивості степеневих функцій $y = x^q$, де q — дробове число у вигляді таблиці.

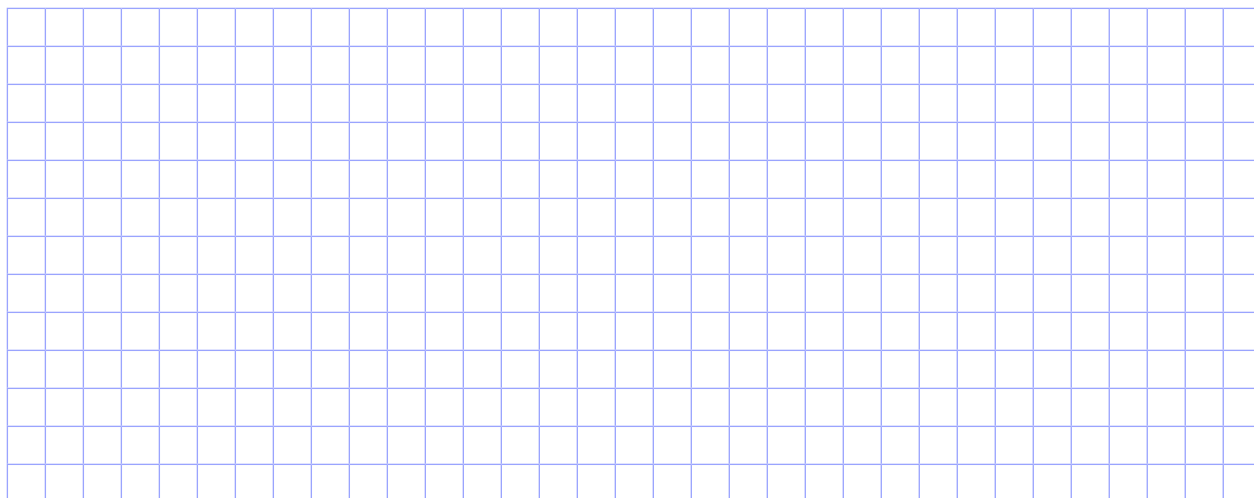
1. Степенева функція	$y = x^q$, q — дробове додатне число, яке менше від 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.

Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
2. Степенева функція	$y = x^q$, q — дробове додатне число, яке більше за 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
3. Степенева функція	$y = x^q$, q — дробове від'ємне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення.

Приклад 3. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[4]{-x} + (x - 2)^{\frac{1}{2}}$.



Приклад 4. Побудуйте графік функції $y = 2x^{\frac{2}{3}} - 1$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Математичний маятник використовується у фізиці для моделювання періодичних рухів. Залежність періоду коливань маятника T (у секундах) від довжини маятника l (у метрах) описується формулою $T(l) = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$, де $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — прискорення вільного падіння.

- 1) Побудуйте графік функції $T(l)$. Визначте за графіком множину значень функції.
- 2) Обчисліть період коливань маятника, якщо його довжина становить 0,64 м.
- 3) Сформулюйте практичну ситуацію, де зміна довжини маятника може вплинути на роботу пристрою (наприклад, годинника, датчика руху чи механічного генератора) і поясніть цей вплив.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = x^4$;
- 2) $y = x^{\frac{1}{4}}$;
- 3) $y = x^{-4}$;
- 4) $y = x^{-\frac{1}{4}}$.

2. Накресліть графік функції та запишіть її властивості:

- 1) $y = x^{\frac{2}{3}}$;
- 2) $y = x^{-1,45}$;
- 3) $y = x^{-\frac{1}{2}}$;
- 4) $y = x^{1,8}$.

3. Побудуйте графік функції $y = x^{0,25}$. За допомогою графіка знайдіть значення:

- 1) функції, якщо значення аргументу дорівнює 0,5; 16;
- 2) аргументу, що відповідають значенням функції 1; 1,5.

4. Побудуйте графік функції $y = x^{\frac{1}{3}}$. За допомогою графіка знайдіть значення:

- 1) функції, якщо значення аргументу дорівнює 0,5; 8;
- 2) аргументу, що відповідають значенням функції 1; 1,5.

5. Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:

- 1) $y = x^3 + 2$;
- 2) $y = x^{-2} - 3$;
- 3) $y = (x - 2)^{-\frac{2}{5}}$;
- 4) $y = (x + 1)^{1,25}$.

6. Побудуйте на одній координатній площині два графіки й порівняйте їхні властивості:

- 1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ і $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$;
- 2) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ і $g(x) = x^{\frac{5}{4}}$;
- 3) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ і $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$;
- 4) $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$ і $g(x) = x^{\frac{7}{6}}$.

Рівень В

1. Побудуйте графіки функцій:

$$\begin{array}{lll} 1) y = -x^{\frac{1}{4}}; & 2) y = (x-2)^{\frac{1}{2}}; & 3) y = -(x+3)^{\frac{2}{3}}; \\ 4) y = -x^{\frac{4}{3}}; & 5) y = x^{\frac{1}{4}} + 2; & 6) y = -(x-1)^{\frac{3}{2}}. \end{array}$$

2. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = x^{\frac{5}{6}}; \quad 2) y = (x-3)^{2,6}; \quad 3) y = (x^2 - 6x - 7)^{\frac{1}{9}}.$$

3. Побудуйте і порівняйте графіки функцій:

$$1) f(x) = \sqrt[5]{x} \text{ і } y = x^{\frac{1}{5}}; \quad 2) f(x) = \sqrt{x} \text{ і } g(x) = x^{\frac{1}{2}}.$$

4. Побудуйте схематично графік функції:

$$1) y = x^{-20} + 3; \quad 2) y = x^{-12} - 1; \quad 3) y = x^{-0,9} + 2; \quad 4) y = x^{-2,5} - 3.$$

5. Побудуйте ескіз графіка функції $y = (x+3)^{0,8} - 2$ та запишіть її властивості.

6. Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = (3-x)^{\frac{1}{4}}; \quad 2) f(x) = (x+5)^{\frac{1}{2}}; \quad 3) f(x) = (x-1)^{\frac{1}{5}}; \quad 4) f(x) = (4-x)^{\frac{2}{3}}.$$

Рівень С

1. Укажіть інтервали спадання функції:

$$1) y = -\sqrt{x+1}; \quad 2) y = -2x^3; \quad 3) y = x^{\frac{2}{3}}; \quad 4) y = \frac{2}{5}x^{\frac{1}{5}}.$$

2. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3; \quad 2) y = \left((x-2)^{\frac{1}{4}}\right)^4; \quad 3) y = x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}.$$

3. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & x < 1; \\ x^{\frac{2}{3}}, & 1 \leq x \leq 8; \\ \frac{32}{x}, & x > 8. \end{cases}$

4. Укажіть нулі функції (якщо такі є) та проміжки зростання або спадання:

$$1) y = x^{\frac{13}{3}}; \quad 2) y = x^{-7}; \quad 3) y = x^{-24}; \quad 4) y = x^{\frac{17}{4}}.$$

5. Визначте, зростає чи спадає функція на заданому проміжку:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = x^{\frac{2}{3}}, x \in [1; 8]; & 2) f(x) = x^{\frac{1}{3}}, x \in [-8; 0]; \\ 3) f(x) = x^{\frac{1}{2}}, x \in [1; 9]; & 4) f(x) = x^{\frac{4}{3}}, x \in [-2; 2]. \end{array}$$

6. Побудуйте графік функції та знайдіть множину її значень:

$$\begin{array}{ll} 1) y = 3x^{\frac{1}{4}}, x \in [0; 16]; & 2) y = x^{\frac{1}{2}}, x \in [1; 9]; \\ 3) y = -2x^{\frac{3}{5}}, x \in [-32; 32]; & 4) y = x^{\frac{4}{3}}, x \in [1; 10]. \end{array}$$

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Дослідження графіків степеневих функцій із різними раціональними показниками.
- 2.** Аналіз поведінки степеневих функцій з дробовими показниками при наближенні до нуля та нескінченності.
- 3.** Дослідження моделей біологічних процесів, що описуються степеневими функціями (метаболізм, ріст організмів).
- 4.** Використання степеневих функцій у фізиці (інтенсивність світла, рух у середовищі, частота коливань).
- 5.** Геометричні моделі, що описуються степеневими функціями (площа, об'єм).
- 6.** Вивчення асимптот степеневих функцій із раціональними показниками.







