

Урок 11. Графіки степеневі функції з раціональними показниками

Тип уроку: формування умінь і навичок.

План уроку

1. Повторення.
2. Графіки степеневі функції з раціональними показниками.
3. Узагальнення властивостей степеневих функцій з дробовими показниками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чому важливо розуміти, на яких проміжках степенева функція є зростаючою або спадною?
- 2) Як вигляд графіка допомагає розумінню властивостей функцій?
- 3) Як побудова графіків степеневих функцій сприяє аналізу даних в науці або в економіці?
- 4) Чи використовують в комп'ютерній графіці та анімації степеневі функції в цілому і з дробовими показниками зокрема?
- 5) Чому під час розрахунку кількості речовини в хімії або радіоактивного розпаду речовини використовуються не тільки цілі, а й дробові показники степенів?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть: $\frac{32^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}.$

Відповідь. 2.

2. Скоротіть дріб $\frac{b^{\frac{5}{6}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}} - 9c^{\frac{1}{2}}}.$

Відповідь. $\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} - 3c^{\frac{1}{4}}}.$

3. Обчисліть: $\left(81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}\right) : \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3,6}\right).$

Відповідь. 48.

4. Розв'яжіть рівняння $4 = x^{\frac{2}{7}}.$

Відповідь. 128.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Математичний маятник використовується у фізиці для моделювання періодичних рухів. Залежність періоду коливань маятника T (у секундах) від довжини маятника l (у метрах) описується формулою $T(l) = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$, де $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — прискорення вільного падіння.

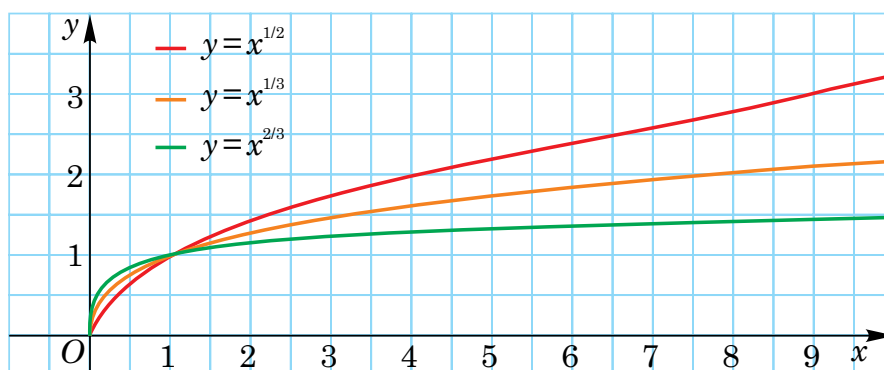
- 1) Побудуйте графік функції $T(l)$. Визначте за графіком множину значень функції.
- 2) Обчисліть період коливань маятника, якщо його довжина становить 0,64 м.
- 3) Сформулюйте практичну ситуацію, де зміна довжини маятника може вплинути на роботу пристрою (наприклад, годинника, датчика руху чи механічного генератора) і поясніть цей вплив.

III. Графіки степеневої функції з раціональними показниками

Повторимо побудову графіків степеневої функції з дробовими показниками степенів.

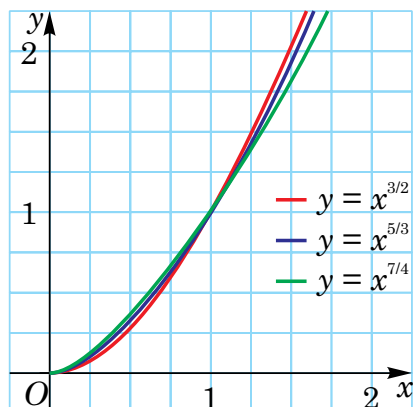
- 1.** q — дробове додатне число, яке менше від 1 (правильний дріб).

Наприклад, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$.



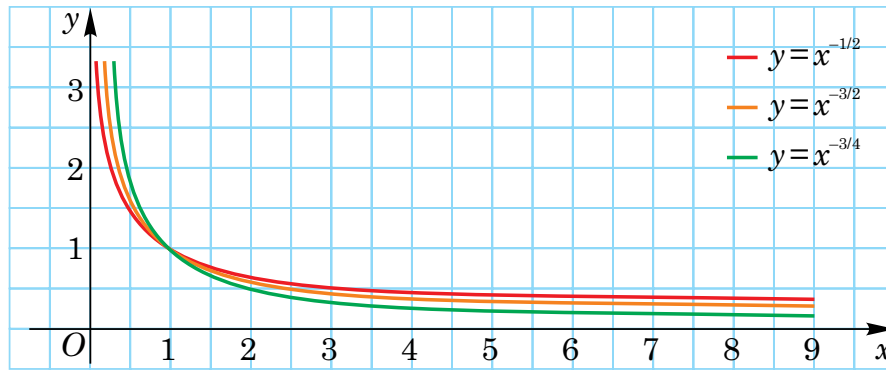
- 2.** q — дробове додатне число, яке більше за 1 (неправильний дріб).

Наприклад, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{5}{3}}$, $y = x^{\frac{7}{4}}$.



3. q — дробове від'ємне число.

Наприклад, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$, $y = x^{-\frac{2}{5}}$.



Ілюстративний приклад

5. Побудуйте графік функції за таблицею значень:

а) $y = x^{\frac{1}{2}}$;

б) $y = x^{\frac{3}{2}}$;

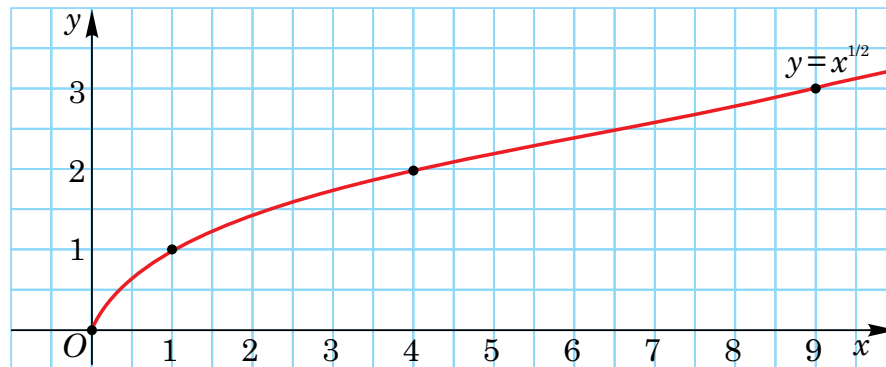
в) $y = x^{-\frac{1}{3}}$.

Розв'язання. а) Знайдемо значення змінної y для певних значень x .

$y = x^{\frac{1}{2}}$.

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Побудуємо точки на координатній площині відповідно до знайдених координат (див. рисунок).

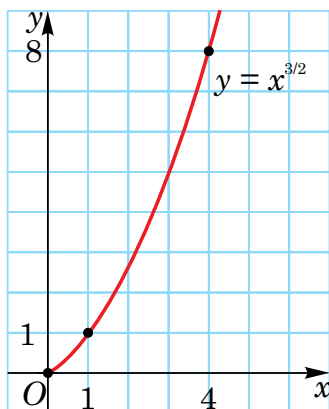


б) Знайдемо значення змінної y для певних значень x .

$y = x^{\frac{3}{2}}$.

x	0	1	4
y	0	1	8

Побудуємо точки на координатній площині відповідно до знайдених координат (див. рисунок).

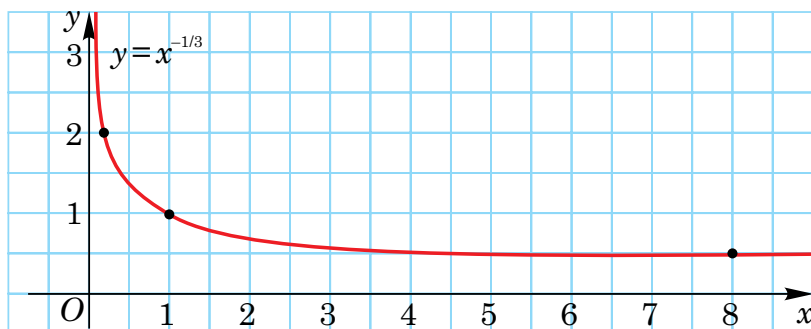


в) Знайдемо значення змінної y для певних значень x .

$$y = x^{-\frac{1}{3}}.$$

x	0,125	1	8
y	2	1	0,5

Побудуємо точки на координатній площині відповідно до знайдених координат (див. рисунок).



Опис графіка функції $y = kx^q$

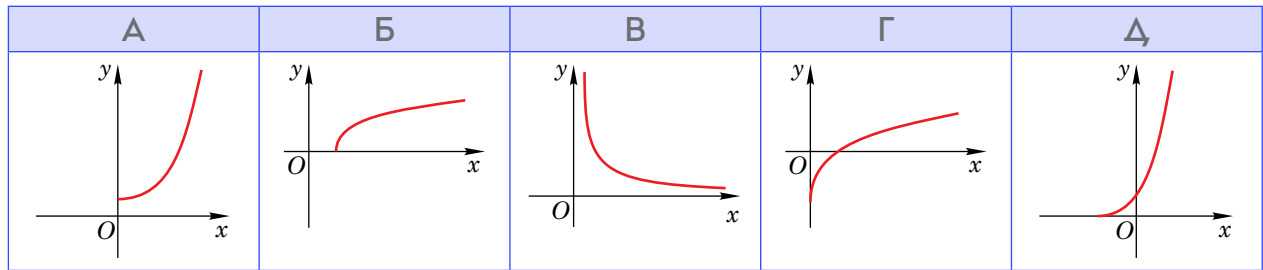
У степеневій функції $y = kx^q$ коефіцієнт k впливає на розміщення графіка.

1. Якщо $(0 < k < 1)$, то графік притискається до осі абсцис.
Наприклад, якщо $k = 0,5$ то кожне значення функції зменшується вдвічі.
2. Якщо $k > 1$, то графік притискається до осі ординат.
Наприклад, якщо $k = 2$, то кожне значення функції подвоюється.
3. Якщо $k < 0$, то відбувається відображення графіка відносно осі x .
Усі додатні значення стають від'ємними, і навпаки.

Ілюстративний приклад

6. Установіть відповідність між функцією (1–4) та ескізом графіка (А–Д) функції.

1) $y = x^{\frac{1}{2}} - 1$; 2) $y = x^{\frac{3}{2}} + 1$; 3) $y = (x - 1)^{\frac{1}{2}}$; 4) $y = (x + 1)^{\frac{5}{2}}$.



Відповідь. 1 – Г, 2 – А, 3 – Б, 4 – Д.

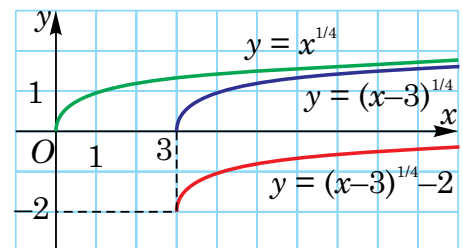
7. Побудуйте графік функції $f(x) = (x - 3)^{\frac{1}{4}} - 2$. Укажіть нулі функції.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ і виконаємо паралельне перенесення графіка функції уздовж осі Ox на три одиниці праворуч і на дві одиниці вниз уздовж осі Oy .

Точка перетину графіка з віссю абсцис є нулем функції. Оскільки графічно точно значення x укажати непросто, то розв'яжемо рівняння:

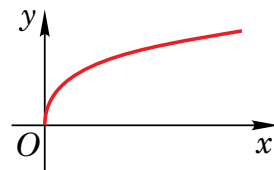
$$(x - 3)^{\frac{1}{4}} - 2 = 0, \quad (x - 3)^{\frac{1}{4}} = 2, \quad x - 3 = 16, \quad x = 19.$$

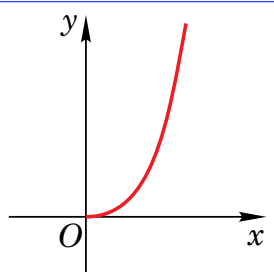
Відповідь. 19.



IV. Узагальнення властивостей степеневих функцій з дробовими показниками

Узагальнимо властивості степеневі функції $y = x^q$, де q — дробове число у вигляді таблиці.

1. Степенева функція	$y = x^q$, q — дробове додатне число, яке менше від 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.

2. Степенева функція	$y = x^q$, q — дробове додатне число, яке більше за 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
3. Степенева функція	$y = x^q$, q — дробове від'ємне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення.

Ілюстративні приклади

8. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[4]{-x} + (x-2)^{\frac{1}{2}}$.

Розв'язання. Область визначення функції знайдемо за умови існування кожного

доданку суми:
$$\begin{cases} -x \geq 0, \\ x-2 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Звідси $x \in \emptyset$.

Відповідь. $\emptyset$.

9. Побудуйте графік функції $y = 2x^{\frac{2}{3}} - 1$.

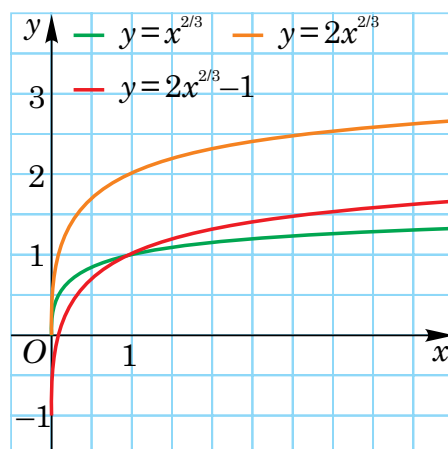
Розв'язання. Покрокова схема побудови графіка функції:

1) $y = x^{\frac{2}{3}}$;

2) $y = 2x^{\frac{2}{3}}$ — розтяг графіка вдвічі відносно осі Ox (усі значення y збільшуються удвічі).

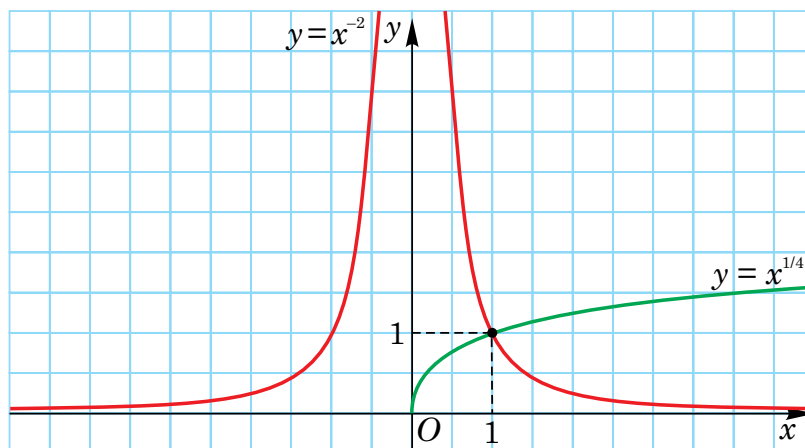
3) $y = 2x^{\frac{2}{3}} - 1$ — паралельне перенесення графіка вздовж осі Oy на одиницю вниз.

Побудуємо графік функції (див. рисунок).



10. Установіть множину розв'язків нерівності $\sqrt[4]{x} < x^{-2}$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $f(x) = \sqrt[4]{x}$ та $g(x) = x^{-2}$ (див. рисунок).



Графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ перетинаються в точці $x = 1$.

За умовою, $f(x) < g(x)$, тобто знайдемо значення функції $f(x)$, які менші від відповідних значень функції $g(x)$, а саме, графік функції $f(x)$ лежить нижче від графіка функції $g(x)$.

Маємо інтервал $(0; 1)$. Щоб отримати правильні розв'язки нерівності, треба вказати області визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$ або область допустимих значень нерівності. Для функції $f(x) = \sqrt[4]{x} : x \in [0; +\infty)$, для функції $g(x) = x^{-2} : x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Отже, $x \in (0; 1)$.

Відповідь. $(0; 1)$.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Математичний маятник використовується у фізиці для моделювання періодичних рухів. Залежність періоду коливань маятника T (у секундах) від довжини

маятника l (у метрах) описується формулою $T(l) = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$, де $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — прискорення вільного падіння.

- 1) Побудуйте графік функції $T(l)$. Визначте за графіком множину значень функції.
- 2) Обчисліть період коливань маятника, якщо його довжина становить 0,64 м.
- 3) Сформулюйте практичну ситуацію, де зміна довжини маятника може вплинути на роботу пристрою (наприклад, годинника, датчика руху чи механічного генератора) і поясніть цей вплив.

Розв'язання. 1) Підставимо у формулу $T(l) = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$ значення $\pi = 3,14$, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Отримаємо: $T(l) = 2 \cdot 3,14 \left(\frac{l}{9,8} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 2l^{\frac{1}{2}}$.

Побудуємо графік функції (див. рисунок).

Знайдемо множину значень функції $T(l)$:

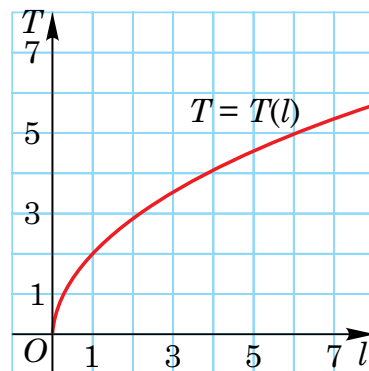
$$E(T) = [0; +\infty).$$

2) Якщо довжина маятника становить 0,64 м, то знайдемо значення функції $T(l)$ при $l = 0,64$:

$$T(0,64) = 2 \cdot 0,64^{\frac{1}{2}} = 1,6 \text{ (с)}.$$

3) Якщо довжину підвіски механічного маятникового годинника збільшити, то період коливань збільшиться (кожен такт стає довший). Тому годинник почне відставати. Якщо довжину зменшити — годинник буде поспішати.

Відповідь. $[0; +\infty)$; 1,6 с.



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Побудуйте графіки функцій:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^{\frac{1}{4}}$; 3) $y = x^{-4}$; 4) $y = x^{-\frac{1}{4}}$.

2. Накресліть графік функції та запишіть її властивості:

1) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 2) $y = x^{-1,45}$; 3) $y = x^{\frac{1}{2}}$; 4) $y = x^{1,8}$.

3. Побудуйте графік функції $y = x^{0,25}$. За допомогою графіка знайдіть значення:

- 1) функції, якщо значення аргументу дорівнює 0,5; 16;
2) аргументу, що відповідають значенням функції 1; 1,5.

4. Побудуйте графік функції $y = x^{\frac{1}{3}}$. За допомогою графіка знайдіть значення:

- 1) функції, якщо значення аргументу дорівнює 0,5; 8;
2) аргументу, що відповідають значенням функції 1; 1,5.

5. Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:

1) $y = x^3 + 2$; 2) $y = x^{-2} - 3$; 3) $y = (x - 2)^{-\frac{2}{5}}$; 4) $y = (x + 1)^{1,25}$.

6. Побудуйте на одній координатній площині два графіки й порівняйте їхні властивості:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ і $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$; 2) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ і $g(x) = x^{\frac{5}{4}}$;
3) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ і $g(x) = x^{\frac{4}{3}}$; 4) $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$ і $g(x) = x^{\frac{7}{6}}$.

Рівень В

1. Побудуйте графіки функцій:

1) $y = -x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y = (x - 2)^{\frac{1}{2}}$; 3) $y = -(x + 3)^{\frac{2}{3}}$;
4) $y = -x^{\frac{4}{3}}$; 5) $y = x^{\frac{1}{4}} + 2$; 6) $y = -(x - 1)^{\frac{3}{2}}$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^{\frac{5}{6}}$;

2) $y = (x - 3)^{2.6}$;

3) $y = (x^2 - 6x - 7)^{-\frac{1}{9}}$.

3. Побудуйте і порівняйте графіки функцій:

1) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ і $y = x^{\frac{1}{5}}$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

4. Побудуйте схематично графік функції:

1) $y = x^{-20} + 3$;

2) $y = x^{-12} - 1$;

3) $y = x^{-0.9} + 2$;

4) $y = x^{-2.5} - 3$.

5. Побудуйте ескіз графіка функції $y = (x + 3)^{0.8} - 2$ та запишіть її властивості.

6. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = (3 - x)^{\frac{1}{4}}$;

2) $f(x) = (x + 5)^{\frac{1}{2}}$;

3) $f(x) = (x - 1)^{-\frac{1}{5}}$;

4) $f(x) = (4 - x)^{-\frac{2}{3}}$.

Рівень С

1. Укажіть інтервали спадання функції:

1) $y = -\sqrt{x+1}$;

2) $y = -2x^3$;

3) $y = x^{-\frac{2}{3}}$;

4) $y = \frac{2}{5}x^{\frac{1}{5}}$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$;

2) $y = \left((x - 2)^{\frac{1}{4}}\right)^4$;

3) $y = x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}$.

3. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & x < 1; \\ x^{\frac{2}{3}}, & 1 \leq x \leq 8; \\ \frac{32}{x}, & x > 8. \end{cases}$

4. Укажіть нулі функції (якщо такі є) та проміжки зростання або спадання:

1) $y = x^{\frac{13}{3}}$;

2) $y = x^{-7}$;

3) $y = x^{-24}$;

4) $y = x^{-\frac{17}{4}}$.

5. Визначте, зростає чи спадає функція на заданому проміжку:

1) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}, x \in [1; 8]$;

2) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}, x \in [-8; 0]$;

3) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, x \in [1; 9]$;

4) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}, x \in [-2; 2]$.

6. Побудуйте графік функції та знайдіть множину її значень:

1) $y = 3x^{\frac{1}{4}}, x \in [0; 16]$;

2) $y = x^{-\frac{1}{2}}, x \in [1; 9]$;

3) $y = -2x^{\frac{3}{5}}, x \in [-32; 32]$;

4) $y = x^{-\frac{4}{3}}, x \in [1; 10]$.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....

- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Дослідження графіків степеневих функцій із різними раціональними показниками.
2. Аналіз поведінки степеневих функцій з дробовими показниками при наближенні до нуля та нескінченності.
3. Дослідження моделей біологічних процесів, що описуються степеневими функціями (метаболізм, ріст організмів).
4. Використання степеневих функцій у фізиці (інтенсивність світла, рух у середовищі, частота коливань).
5. Геометричні моделі, що описуються степеневими функціями (площа, об'єм).
6. Вивчення асимптот степеневих функцій із раціональними показниками.

Список використаних джерел

- 1) Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : профільний рівень : підручник для 10 класу закладів загальної освіти. Харків : Гімназія, 2018. 400 с.