

## Урок 12. Урок–практикум. Побудова графіків та властивості степеневих функцій з раціональними показниками

### РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

#### I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитесь будувати графіки степеневих функцій із раціональними показниками;
- 2) розглянете властивості степеневих функцій із раціональними показниками;
- 3) розв'яжете задачу практичного змісту із застосуванням властивостей степеневих функцій із раціональним показником.

#### II. Повторення

1. Для функції  $y = x^{1,5}$  укажіть правильне твердження.

| А                    | Б             | В             | Г               | Д             |
|----------------------|---------------|---------------|-----------------|---------------|
| $f(4) = \frac{1}{8}$ | $f(1) > f(2)$ | $f(1) < f(2)$ | функція непарна | функція парна |

2. Скільки парних функцій записано в ряду:  $y = x^{-3}$ ,  $y = x^{-4}$ ,  $y = x^6$ ,  $y = x^5$ ,  $y = x^{\frac{1}{4}}$ ,  $y = x^{\frac{7}{2}}$ ?

| А    | Б   | В   | Г      | Д     |
|------|-----|-----|--------|-------|
| одна | дві | три | чотири | п'ять |

3. Для кожної із функцій укажіть область визначення:

- 1)  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ;      2)  $y = x^{-2}$ ;      3)  $y = x^{\frac{3}{4}}$ ;      4)  $y = x^{-\frac{1}{3}}$ .

4. Порівняйте значення функцій у двох точках:

1)  $f(x) = x^{-1}$ ;  $x=1$  і  $x=2$ ;

2)  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ;  $x=1$  і  $x=8$ .

5. Установіть відповідність між функцією (1–3) та її властивістю (А —Г).

Функція

Властивість функції

1  $y = x^{-2}$

А функція має два нулі

2  $y = x^{\frac{1}{3}}$

Б не визначена при  $x = 0$

3  $y = -x$

В графік симетричний відносно початку координат

Г функція зростає на всій області визначення

Д функція набуває лише від'ємних значень

А Б В Г Д

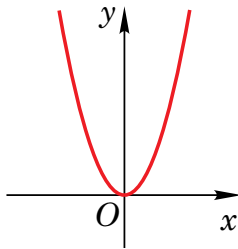
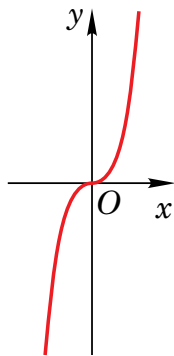
1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

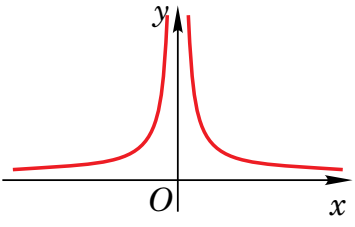
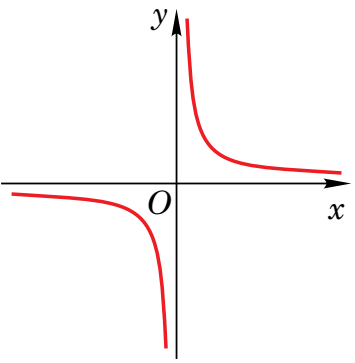
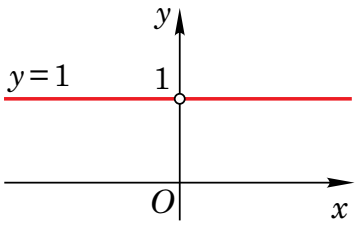
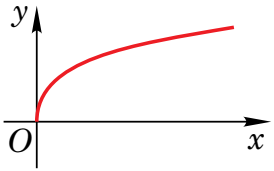
2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

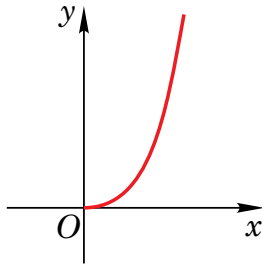
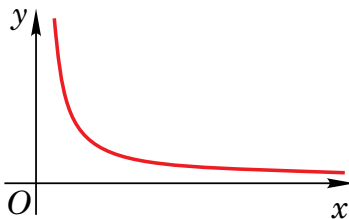
3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

### III. Побудова графіків степеневої функції з раціональними показниками

Повторюємо властивості степеневих функцій.

|                             |                                                                                                |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. <b>Степенева функція</b> | $y = x^n$ , $n$ — парне натуральне число                                                       |
| Схематичний графік          |             |
| Область визначення          | $x \in (-\infty; +\infty)$ .                                                                   |
| Множина значень             | $y \in [0; +\infty)$ .                                                                         |
| Нулі функції                | $x = 0$ .                                                                                      |
| Проміжки монотонності       | Якщо $x \in (-\infty; 0]$ , то функція спадає, якщо $x \in [0; +\infty)$ , то функція зростає. |
| 2. <b>Степенева функція</b> | $y = x^n$ , $n$ — непарне натуральне число                                                     |
| Схематичний графік          |            |
| Область визначення          | $x \in (-\infty; +\infty)$ .                                                                   |
| Множина значень             | $y \in (-\infty; +\infty)$ .                                                                   |
| Нулі функції                | $x = 0$ .                                                                                      |
| Проміжки монотонності       | Зростає на всій області визначення.                                                            |

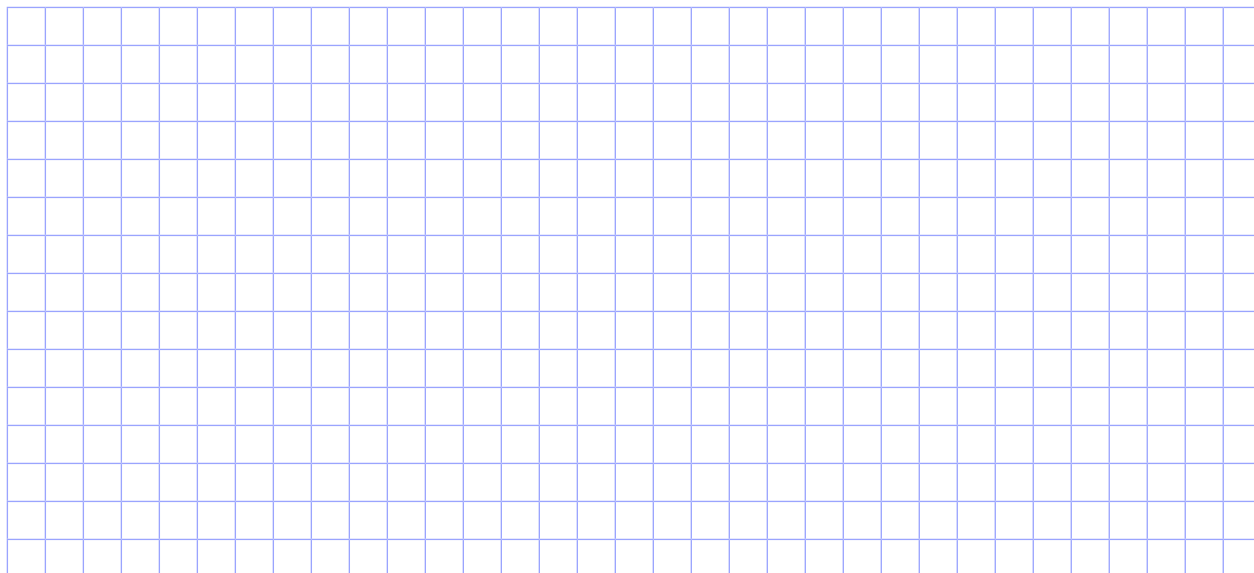
|                             |                                                                                                |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. <b>Степенева функція</b> | $y = x^k$ , $k$ — ціле від'ємне число, яке ділиться на 2 без остачі                            |
| Схематичний графік          |              |
| Область визначення          | $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .                                                       |
| Множина значень             | $y \in (0; +\infty)$ .                                                                         |
| Нулі функції                | Немає.                                                                                         |
| Проміжки монотонності       | Якщо $x \in (-\infty; 0)$ , то функція зростає, якщо $x \in (0; +\infty)$ , то функція спадає. |
| 4. <b>Степенева функція</b> | $y = x^k$ , $k$ — ціле від'ємне число, яке не ділиться на 2 без остачі                         |
| Схематичний графік          |             |
| Область визначення          | $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .                                                       |
| Множина значень             | $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .                                                       |
| Нулі функції                | Немає.                                                                                         |
| Проміжки монотонності       | Спадає на всій області визначення.                                                             |
| 5. <b>Степенева функція</b> | $y = x^k$ , $k = 0$                                                                            |
| Схематичний графік          |            |
| Область визначення          | $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .                                                       |
| Множина значень             | $y = 1$ .                                                                                      |
| Нулі функції                | Немає.                                                                                         |
| Проміжки монотонності       | Монотонна на всій області визначення.                                                          |
| 6. <b>Степенева функція</b> | $y = x^q$ , $q$ — дробове додатне число, яке менше від 1                                       |
| Схематичний графік          |            |
| Область визначення          | $x \in [0; +\infty)$ .                                                                         |
| Множина значень             | $y \in [0; +\infty)$ .                                                                         |
| Нулі функції                | $x = 0$ .                                                                                      |
| Проміжки монотонності       | Зростає на всій області визначення.                                                            |

|                             |                                                                                    |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 7. <b>Степенева функція</b> | $y = x^q$ , $q$ — дробове додатне число, яке більше за 1                           |
| Схематичний графік          |  |
| Область визначення          | $x \in [0; +\infty)$ .                                                             |
| Множина значень             | $y \in [0; +\infty)$ .                                                             |
| Нулі функції                | $x = 0$ .                                                                          |
| Проміжки монотонності       | Зростає на всій області визначення.                                                |
| 8. <b>Степенева функція</b> | $y = x^q$ , $q$ — дробове від'ємне число                                           |
| Схематичний графік          |  |
| Область визначення          | $x \in (0; +\infty)$ .                                                             |
| Множина значень             | $y \in (0; +\infty)$ .                                                             |
| Нулі функції                | Немає.                                                                             |
| Проміжки монотонності       | Спадає на всій області визначення.                                                 |

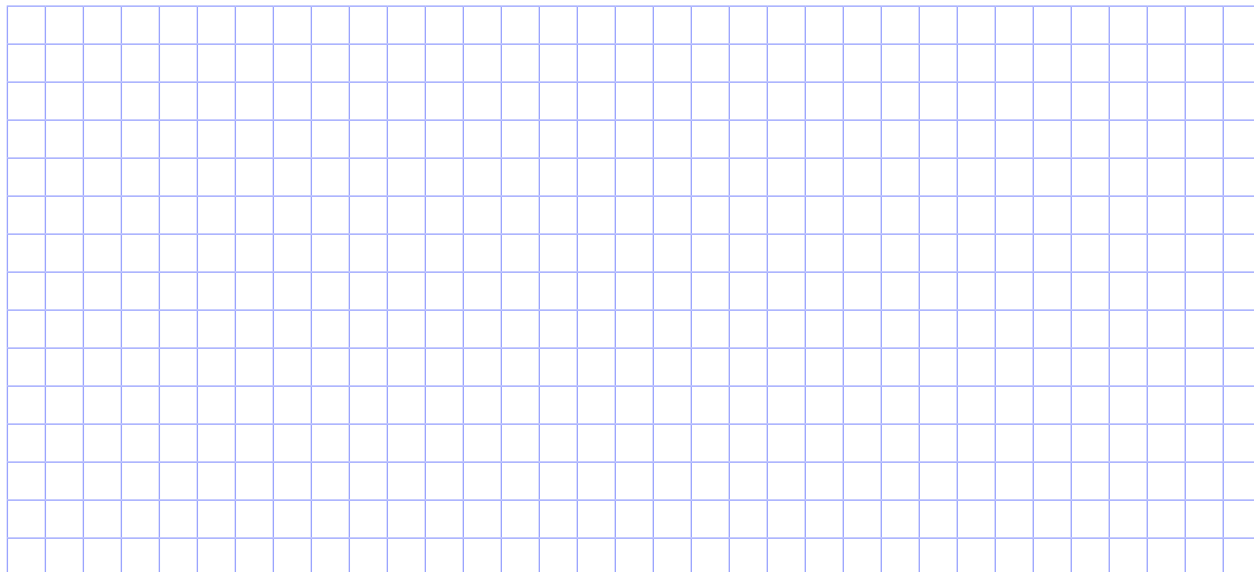
### Алгоритм побудови графіка степеневі функції $y = x^q$

1. Визначте вид степеневі функції.
2. Знайдіть область визначення функції.
3. Знайдіть опорні точки (декілька характерних значень  $x$ , для яких нескладно обчислити  $y$ ).

**Приклад 1.** Побудуйте графік функції  $y = x^{-\frac{3}{2}}$ .



**Приклад 2.** Побудуйте графік функції  $y = x^{\frac{3}{2}}$ .



#### IV. Побудова графіків степеневої функції із раціональними показниками за допомогою геометричних перетворень

##### Перетворення графіка функції $y = f(x)$

|                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = f(x) + a$ , де $a$ — будь-яке число.<br>Паралельне перенесення графіка $f(x)$ уздовж осі $Oy$ .<br>Якщо $a > 0$ на $a$ одиниць вгору.<br>Якщо $a < 0$ на $a$ одиниць вниз.                                           | $y = f(x - a)$ , де $a$ — будь-яке число.<br>Паралельне перенесення графіка $f(x)$ уздовж осі $Ox$ на $a$ одиниць.<br>Якщо в дужках знак « $-$ », то зміщуємо на $a$ одиниць праворуч.<br>Якщо в дужках знак « $+$ », то зміщуємо на $a$ одиниць ліворуч.  |
| $y = k f(x)$ , де $k$ — будь-яке додатне число.<br>Якщо $k > 1$ , то графік $f(x)$ потрібно розтягнути в $k$ разів відносно осі $Ox$ .<br>Якщо $0 < k < 1$ , то графік $f(x)$ потрібно стиснути в $k$ разів до осі $Ox$ . | $y = f(kx)$ , де $k$ — будь-яке додатне число.<br>Якщо $k > 1$ , то графік $f(x)$ потрібно стиснути в $k$ разів до осі $Oy$ .<br>Якщо $0 < k < 1$ , то графік $f(x)$ потрібно розтягнути в $k$ разів відносно осі $Oy$ .                                   |
| $y = -f(x)$ .<br>Графік $f(x)$ симетрично відобразити відносно осі $Ox$ .                                                                                                                                                 | $y = f(-x)$ .<br>Графік $f(x)$ симетрично відобразити відносно осі $Oy$ .                                                                                                                                                                                  |
| $y =  f(x) $ .<br>Частину графіка, яка знаходиться над віссю $Ox$ залишити без змін, а частину графіка, яка знаходиться нижче осі $Ox$ симетрично відобразити відносно цієї осі (“перекинути” вгору).                     | $y = f( x )$ .<br>Частину графіка, яка лежить праворуч від осі $Oy$ залишити без змін, а частину, що ліворуч — стерти і в цій півплощині побудувати графік, симетричний графіку, що залишився в правій півплощині відносно осі $Oy$ (або розкрити модуль). |

Для зручності при побудові графіків функцій за допомогою геометричних перетворень можна записати покрокову схему побудови.

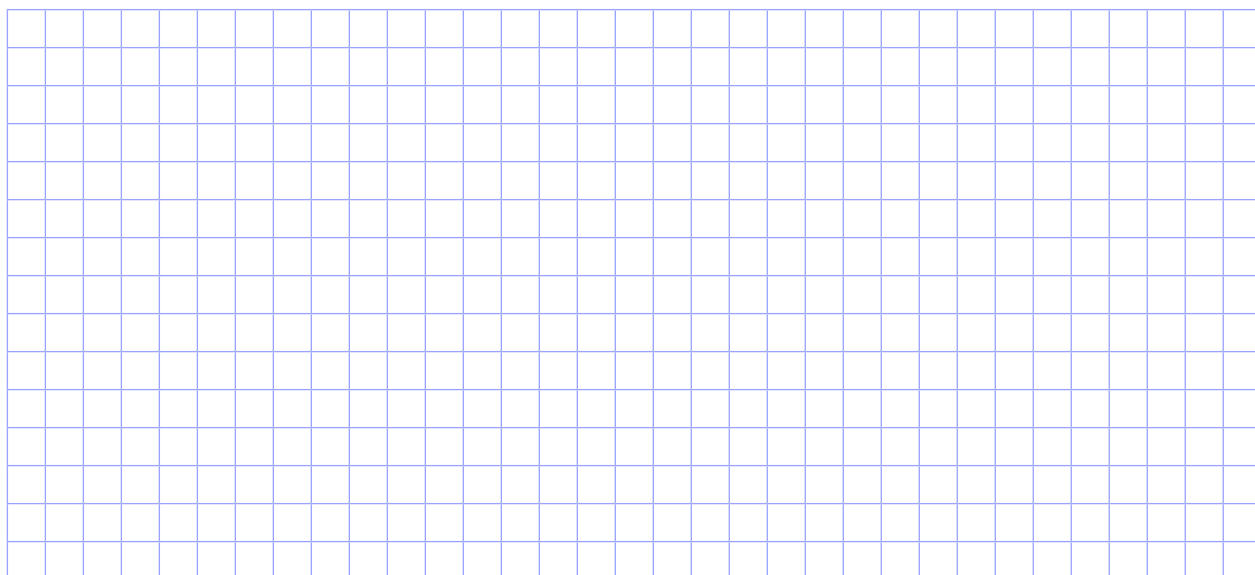
**Приклад 3.** Побудуйте графік функції  $y = 2x^{\frac{2}{3}} - 1$ .



**Приклад 4.** Побудуйте графік функції  $y = (2x - 1)^{\frac{1}{3}} + 4$ .



**Приклад 5.** Укажіть кількість коренів рівняння  $2x^{\frac{4}{3}} = 5x^{-2} + 1$ .



## V. Розв'язування практичної задачі

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Адміністрація парку розваг планує побудувати рампу для тренування скейт-бордистів. Форма рампи задається функцією  $y = x^{\frac{2}{7}}$ , де  $x$  — довжина рампи (у метрах), а  $y$  — висота рампи (у метрах).

1. Побудуйте графік функції, який описує форму рампи, якщо довжина конструкції має становити 5 метрів.
2. Знайдіть висоту рампи у точці, що розташована за 4 метри від початку рампи.
3. Визначте максимальну висоту рампи.

## VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

### Рівень А

1. Побудуйте графік функції:

1)  $y = 2x^4$ ;                      2)  $y = 0,5x^{\frac{1}{4}}$ ;                      3)  $y = -x^{-4}$ ;                      4)  $y = -4x^{\frac{1}{4}}$ .

2. Побудуйте графік функції:

1)  $y = -2x^5$ ;                      2)  $y = 3x^{-3}$ ;                      3)  $y = -4x^{\frac{1}{2}} - 1$ ;  
4)  $y = -0,5x^3 + 2$ ;                      5)  $y = -x^{0,5} - 2$ ;                      6)  $y = x^{\frac{3}{2}} + 1$ .

3. Установіть відповідність між функцією 1)–4) та схематичним графіком (А–Г) функції.

1)  $y = 2x^4$ ;                      2)  $y = -3x^{-3}$ ;                      3)  $y = 0,5x^{\frac{5}{2}}$ ;                      4)  $y = x^{\frac{2}{3}}$ .

| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
|   |   |   |   |

4. Побудуйте графік функції:

1)  $y = (x+2)^{\frac{3}{4}}$ ;                      2)  $y = -(x-1)^{\frac{2}{3}}$ ;                      3)  $y = 2(x+5)^{\frac{1}{3}}$ ;                      4)  $y = \frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{5}}$ .

5. Побудуйте графік функції:

1)  $y = -2(x-3)^{\frac{3}{4}}$ ;                      2)  $y = 0,5(2-x)^{\frac{2}{3}}$ ;                      3)  $y = (x+1)^{\frac{5}{6}} - 4$ ;                      4)  $y = 3x^{\frac{1}{7}}$ .

6. Побудуйте графік та визначте проміжки монотонності функції:

1)  $y = x^{\frac{3}{5}}$ ;                      2)  $y = x^{\frac{4}{7}}$ ;                      3)  $y = (1-x)^{\frac{2}{3}}$ ;                      4)  $y = -(x+3)^{\frac{3}{4}}$ .

## Рівень В

1. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = (x+2)^{\frac{1}{2}}; \quad 2) y = \left(\frac{x+3}{x-4}\right)^{\frac{1}{6}}; \quad 3) y = (4-x)^{\frac{1}{5}}; \quad 4) y = (2+x-x^2)^{0,25}.$$

2. Побудуйте графік функції:

$$1) y = (x-8)^2; \quad 2) y = -0,5x^4 + 3; \quad 3) y = (x+1)^{-5}; \quad 4) y = 2x^{\frac{5}{3}} - 1; \\ 5) y = -0,5x^3; \quad 6) y = (x+3)^5; \quad 7) y = 0,5x^{\frac{1}{4}}; \quad 8) y = (x-2)^{\frac{4}{3}}.$$

3. Побудуйте графік функції:

$$1) y = (2x-1)^{-4}; \quad 2) y = (0,25x-2)^2; \quad 3) y = (5x+10)^{\frac{1}{3}}; \\ 4) y = (|x|+2)^{\frac{5}{2}}; \quad 5) y = |(x+2)^{-2} - 2|; \quad 6) y = |(x-2)^{-3} - 3|.$$

4. Побудуйте графік функції:

$$1) y = 2\left(\frac{x}{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}; \quad 2) y = -3(x+4)^{\frac{2}{3}} + 1; \quad 3) y = \frac{1}{2}(3-x)^{\frac{3}{4}}; \quad 4) y = 4(x+6)^{\frac{1}{5}} - 2.$$

5. Побудуйте графік функції та знайдіть її область визначення:

$$1) y = (2x-3)^{\frac{1}{2}}; \quad 2) y = (3-x)^{\frac{2}{3}}; \quad 3) y = (x+5)^{\frac{3}{4}}; \quad 4) y = (4x)^{\frac{5}{3}}.$$

6. Побудуйте графік функції:

$$1) y = |x|^{\frac{1}{2}}; \quad 2) y = (2|x|-1)^{\frac{2}{3}}; \quad 3) y = 4|x|^{\frac{3}{5}} - 1; \quad 4) y = \left|4x^{\frac{3}{5}} - 1\right|.$$

## Рівень С

1. Побудуйте графік функції та визначте область визначення, множину значень та нулі функції:

$$1) y = (x-3)^{-3}; \quad 2) y = (x+1)^{-4}; \quad 3) y = |2x+4|^{\frac{1}{2}}; \quad 4) y = 2(x-1)^{-\frac{1}{3}}.$$

2. Побудуйте графік функції та укажіть множину значень функції:

$$1) y = (3x-2)^{\frac{1}{3}} + 1; \quad 2) y = (1-2x)^{\frac{2}{5}} - 4; \quad 3) y = (5x+10)^{\frac{3}{4}} - 3; \quad 3) y = (x-7)^{\frac{4}{3}} + 2.$$

3. Побудуйте графік функції:

$$1) y = |x-2|^{\frac{1}{2}} + 3; \quad 2) y = -|x+4|^{\frac{2}{3}}; \quad 3) y = 2|3-x|^{\frac{1}{4}} - 1; \quad 4) y = |2x+1|^{\frac{5}{6}} - 5.$$

4. Побудуйте графік функції та визначте проміжки монотонності:

$$1) y = (x+3)^{\frac{3}{5}}; \quad 2) y = -(x-1)^{\frac{4}{7}}; \quad 3) y = |x|^{\frac{2}{3}}; \quad 4) y = (2-x)^{\frac{1}{3}} + 2.$$

5. Побудуйте графік функції та укажіть нулі функції, якщо вони існують:

$$1) y = (x-4)^{\frac{4}{3}}; \quad 2) y = (2x+1)^{\frac{7}{5}}; \quad 3) y = (5-x)^{\frac{6}{5}}; \quad 4) y = 3(x+2)^{\frac{8}{7}}.$$

6. Спростіть вираз і побудуйте графік функції за допомогою геометричних перетворень:

$$1) y = (8x-16)^{\frac{1}{3}}; \quad 2) y = \left(\frac{x-3}{9}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

## Рефлексія

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась .....
- .....
- .....
- 2) Мені здалося цікавим .....
- .....
- .....
- 3) У мене залишилися запитання щодо .....
- .....
- .....

### Можливі теми проєктів

1. Побудова графіків степеневих функцій за геометричними перетвореннями графіків базових функцій.
2. Степеневі функції з дробовими показниками у біології та в фізиці.
3. Властивості степеневі функції з дробовими показниками.







