

Урок 12. Урок–практикум. Побудова графіків та властивості степеневих функцій з раціональними показниками

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Побудова графіків степеневих функцій з раціональними показниками.
2. Побудова графіків степеневих функцій з раціональними показником за допомогою геометричних перетворень.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи розраховують інженери навантаження на мости або будівлі з використанням степеневих функцій із дробовими показниками степенів?

2) Чому під час розрахунку кількості речовини в хімії або радіоактивного розпаду речовини використовуються не тільки цілі, а й дробові показники степенів?

3) Чи використовують в комп'ютерній графіці та анімації степеневі функції в цілому і з дробовими показниками зокрема?

4) Чи застосовують степеневі функції, щоб описати політ ракети?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Для функції $y = x^{1.5}$ укажіть правильне твердження.

А	Б	В	Г	Д
$f(4) = \frac{1}{8}$	$f(1) > f(2)$	$f(1) < f(2)$	функція непарна	функція парна

Відповідь. В.

2. Скільки парних функцій записано в ряду: $y = x^{-3}$, $y = x^{-4}$, $y = x^6$, $y = x^5$, $y = x^{-\frac{1}{4}}$, $y = x^{\frac{7}{2}}$?

А	Б	В	Г	Д
одна	дві	три	чотири	п'ять

Відповідь. Б.

3. Для кожної із функцій укажіть область визначення:

1) $y = x^{\frac{1}{2}}$; 2) $y = x^{-2}$; 3) $y = x^{\frac{3}{4}}$; 4) $y = x^{-\frac{1}{3}}$.

Відповідь. 1) $x \in [0; +\infty)$; 2) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $x \in [0; +\infty)$; 4) $x \in (0; +\infty)$.

4. Порівняйте значення функцій у двох точках:

1) $f(x) = x^{-1}$; $x = 1$ і $x = 2$; 2) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; $x = 1$ і $x = 8$.

Відповідь. 1) $f(1) > f(2)$; 2) $f(1) < f(8)$.

5. Установіть відповідність між функцією (1–3) та її властивістю (А —Г).

Функція	Властивість функції	А Б В Г Д
1 $y = x^{-2}$	А функція має два нулі	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $y = x^{\frac{1}{3}}$	Б не визначена при $x = 0$	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $y = -x$	В графік симетричний відносно початку координат	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Г функція зростає на всій області визначення	
	Д функція набуває лише від'ємних значень	

Відповідь. 1 – Б, 2 – Г, 3 – В.

Як я вирішую певну проблему?

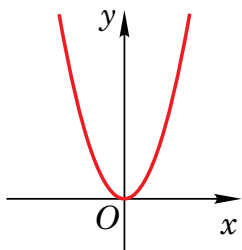
Задача. Адміністрація парку розваг планує побудувати рампу для тренування скейт-

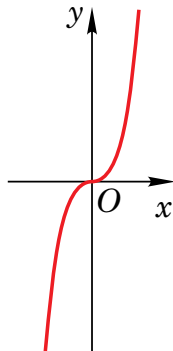
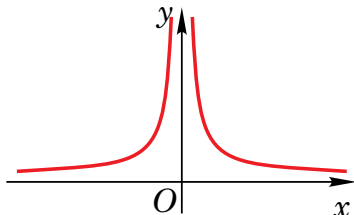
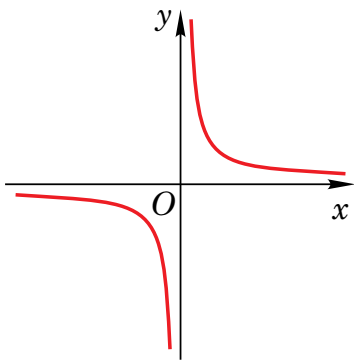
бордистів. Форма рампи задається функцією $y = x^{\frac{2}{7}}$, де x — довжина рампи (у метрах), а y — висота рампи (у метрах).

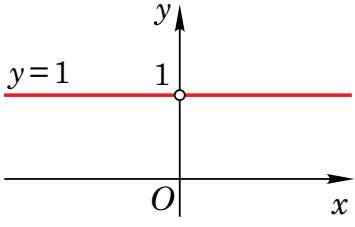
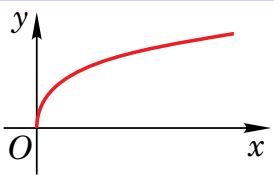
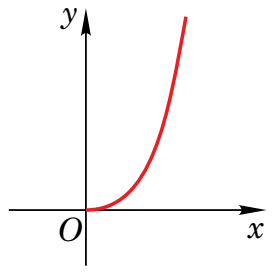
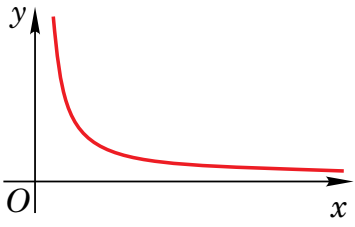
1. Побудуйте графік функції, який описує форму рампи, якщо довжина конструкції має становити 5 метрів.
2. Знайдіть висоту рампи у точці, що розташована за 4 метри від її початку рампи.
3. Визначте максимальну висоту рампи.

III. Побудова графіків степеневої функції з раціональними показниками

Повторюємо властивості степеневих функцій.

1. Степенева функція	$y = x^n$, n — парне натуральне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Якщо $x \in (-\infty; 0]$, то функція спадає, якщо $x \in [0; +\infty)$, то функція зростає.

2. Степенева функція	$y = x^n$, n — непарне натуральне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (-\infty; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
3. Степенева функція	$y = x^k$, k — ціле від'ємне число, яке ділиться на 2 без остачі
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то функція зростає, якщо $x \in (0; +\infty)$, то функція спадає.
4. Степенева функція	$y = x^k$, k — ціле від'ємне число, яке не ділиться на 2 без остачі
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення.

5. Степенева функція	$y = x^k, k = 0$
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y = 1$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Монотонна на всій області визначення.
6. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове додатне число, яке менше від 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
7. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове додатне число, яке більше за 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
8. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове від'ємне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення.

Алгоритм побудови графіка степеневі функції $y = x^q$

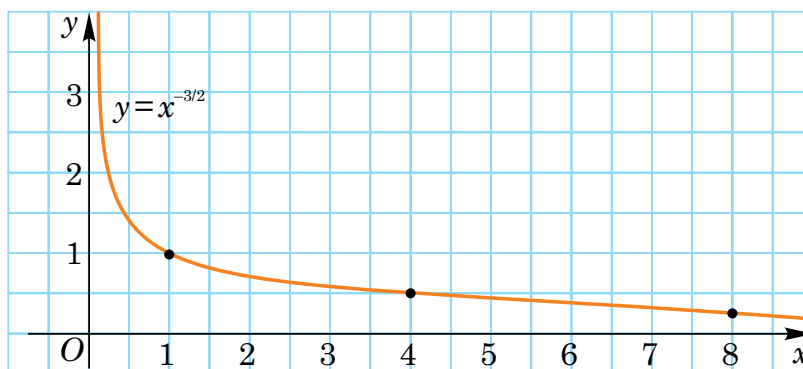
1. Визначте вид степеневі функції.
2. Знайдіть область визначення функції.
3. Знайдіть опорні точки (декілька характерних значень x , для яких нескладно обчислити y).

Ілюстративні приклади

5. Побудуйте графік функції $y = x^{-\frac{3}{2}}$.

Розв'язання. Функція $y = x^{-\frac{3}{2}}$ — степенева функція з дробовим показником, який менший від 0. Область визначення: $x \in (0; +\infty)$. Побудуємо графік функції за табличними значеннями.

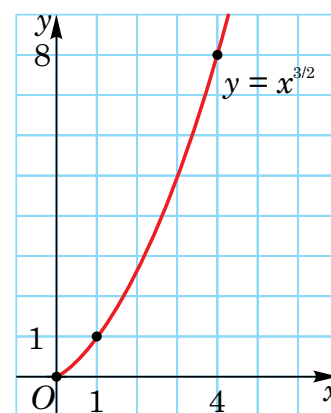
x	1	4	0,25
y	1	0,5	8



6. Побудуйте графік функції $y = x^{\frac{3}{2}}$.

Розв'язання. Функція $y = x^{\frac{3}{2}}$ — степенева функція з дробовим показником, більшим за одиницю. Область визначення: $x \in [0; +\infty)$. Побудуємо графік функції за табличними значеннями.

x	0	1	4	0,25
y	0	1	8	0,125



IV. Побудова графіків степеневої функції із раціональними показниками за допомогою геометричних перетворень

Перетворення графіка функції $y = f(x)$

$y = f(x) + a$, де a — будь-яке число. Паралельне перенесення графіка $f(x)$ уздовж осі Oy . Якщо $a > 0$ на a одиниць вгору. Якщо $a < 0$ на a одиниць вниз.	$y = f(x - a)$, де a — будь-яке число. Паралельне перенесення графіка $f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць. Якщо в дужках знак « $-$ », то зміщуємо на a одиниць праворуч. Якщо в дужках знак « $+$ », то зміщуємо на a одиниць ліворуч.
$y = k f(x)$, де k — будь-яке додатне число. Якщо $k > 1$, то графік $f(x)$ потрібно розтягнути в k разів відносно осі Ox . Якщо $0 < k < 1$, то графік $f(x)$ потрібно стиснути в k разів до осі Ox .	$y = f(k \cdot x)$, де k — будь-яке додатне число. Якщо $k > 1$, то графік $f(x)$ потрібно стиснути в k разів до осі Oy . Якщо $0 < k < 1$, то графік $f(x)$ потрібно розтягнути в k разів відносно осі Oy .
$y = -f(x)$. Графік $f(x)$ симетрично відобразити відносно осі Ox .	$y = f(-x)$. Графік $f(x)$ симетрично відобразити відносно осі Oy .
$y = f(x) $. Частину графіка, яка знаходиться над віссю Ox залишити без змін, а частину графіка, яка знаходиться нижче осі Ox симетрично відобразити відносно цієї осі (“перекинути” вгору).	$y = f(x)$. Частину графіка, яка лежить праворуч від осі Oy залишити без змін, а частину, що ліворуч — стерти і в цій півплощині побудувати графік, симетричний графіку, що залишився в правій півплощині відносно осі Oy (або розкрити модуль).

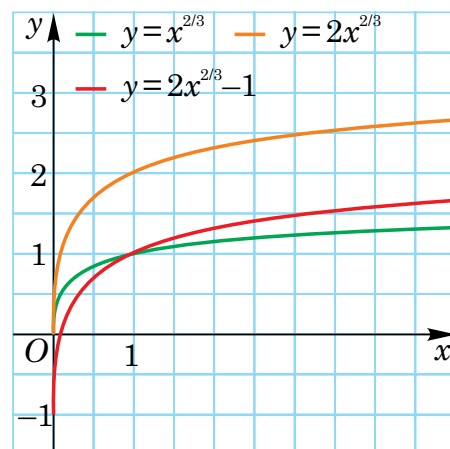
Для зручності при побудові графіків функцій за допомогою геометричних перетворень можна записати покрокову схему побудови.

Ілюстративні приклади

8. Побудуйте графік функції $y = 2x^{\frac{2}{3}} - 1$.

Розв’язання. Побудуємо покрокову схему побудови графіка функції.

- $y = x^{\frac{2}{3}}$;
 - $y = 2x^{\frac{2}{3}}$ — розтяг в 2 рази відносно осі Ox ;
 - $y = 2x^{\frac{2}{3}} - 1$ — паралельне перенесення вздовж осі Oy на одиницю вниз.
- Побудуємо графік функції.



9. Побудуйте графік функції $y = (2x - 1)^{\frac{1}{3}} + 4$.

Розв’язання. Виконаємо перетворення функції.

$$y = (2(x - 0,5))^{\frac{1}{3}} + 4.$$

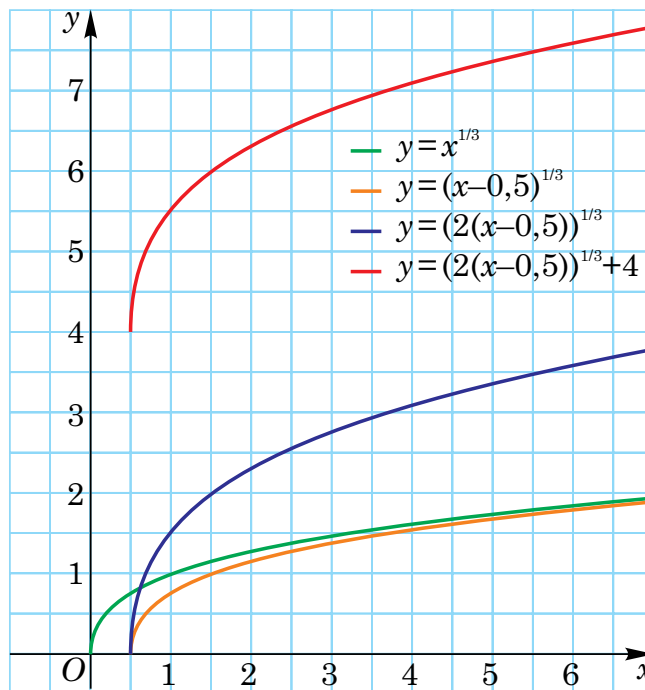
Побудуємо покрокову схему побудови графіка функції.

1) $y = x^{\frac{1}{3}}$;

2) $y = (x - 0,5)^{\frac{1}{3}}$ — паралельне перенесення вздовж осі Ox на 0,5 вправо;

3) $y = (2(x - 0,5))^{\frac{1}{3}}$ — стиск в 2 рази до осі Oy ;

4) $y = (2(x - 0,5))^{\frac{1}{3}} + 4$ — паралельне перенесення вздовж осі Oy на 4 одиниці верх.



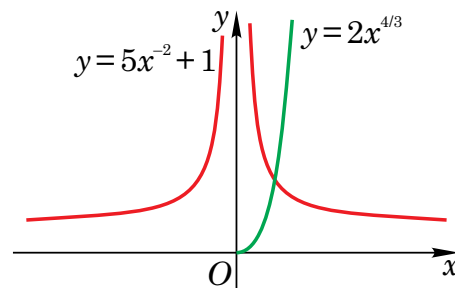
- 10.** Укажіть кількість коренів рівняння $2x^{\frac{4}{3}} = 5x^{-2} + 1$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо

графіки функцій $y = 2x^{\frac{4}{3}}$ і $y = 5x^{-2} + 1$.

Оскільки графіки функцій перетинаються в одній точці, то рівняння має один корінь.

Відповідь. Один корінь.



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Адміністрація парку розваг планує побудувати рампу для тренування скейтбордистів. Форма рампи задається функцією $y = x^{\frac{2}{7}}$, де x — довжина рампи (у метрах), а y — висота рампи (у метрах).

1. Побудуйте графік функції, який описує форму рампи, якщо довжина конструкції має становити 5 метрів.
2. Знайдіть висоту рампи у точці, що розташована за 4 метри від початку рампи.
3. Визначте максимальну висоту рампи.

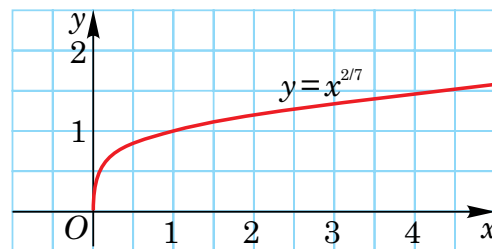
Розв'язання.

1. Оскільки довжина рампи становить 5 метрів, то побудуємо графік функції $y = x^{\frac{2}{7}}$, при $x \in [0; 5]$.

2. За графіком функції визначаємо висоту рампи у точці, що розташована за 4 метри від початку рампи — точка (4; 1,5). Отже, висота рампи в зазначеній точці становить 1,5 метри. Для перевірки знайдемо значення функції при $x = 4$: $f(4) = 4^{\frac{2}{7}} \approx 1,48$ (м).

3. Оскільки функція зростає на всій області визначення, то найвища висота рампи, коли $x = 5$, тобто $f(5) = 5^{\frac{2}{7}} \approx 1,58$ (метра).

Відповідь. 1,48 м, 1,58 м.



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Побудуйте графік функції:

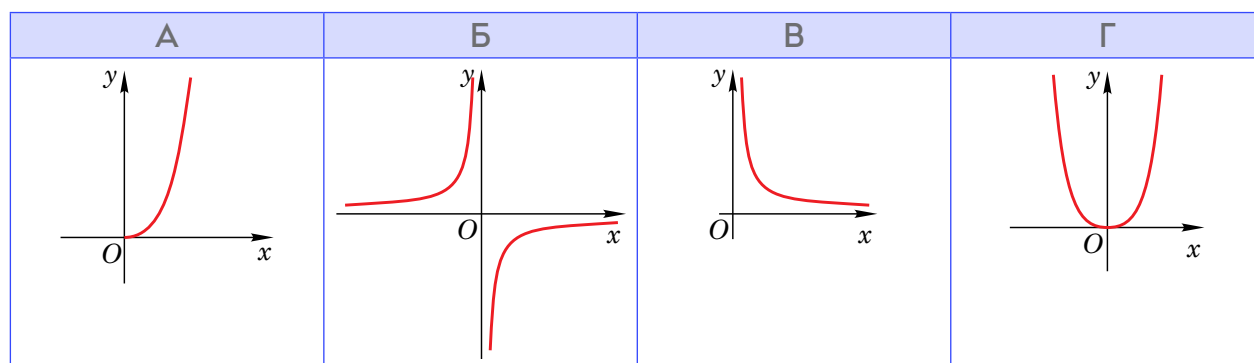
1) $y = 2x^4$; 2) $y = 0,5x^{\frac{1}{4}}$; 3) $y = -x^{-4}$; 4) $y = -4x^{-\frac{1}{4}}$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = -2x^5$; 2) $y = 3x^{-3}$; 3) $y = -4x^{\frac{1}{2}} - 1$;
4) $y = -0,5x^3 + 2$; 5) $y = -x^{0,5} - 2$; 6) $y = x^{-\frac{3}{2}} + 1$.

3. Установіть відповідність між функцією 1)–4) та схематичним графіком (А–Г) функції.

1) $y = 2x^4$; 2) $y = -3x^{-3}$; 3) $y = 0,5x^{\frac{5}{2}}$; 4) $y = x^{-\frac{2}{3}}$.



4. Побудуйте графік функції:

1) $y = (x+2)^{\frac{3}{4}}$; 2) $y = -(x-1)^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = 2(x+5)^{\frac{1}{3}}$; 4) $y = \frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{5}}$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = -2(x-3)^{\frac{3}{4}}$; 2) $y = 0,5(2-x)^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = (x+1)^{\frac{5}{6}} - 4$; 4) $y = 3x^{\frac{1}{7}}$.

6. Побудуйте графік та визначте проміжки монотонності функції:

1) $y = x^{\frac{3}{5}}$; 2) $y = x^{-\frac{4}{7}}$; 3) $y = (1-x)^{\frac{2}{3}}$; 4) $y = -(x+3)^{\frac{3}{4}}$.

Рівень В

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}$; 2) $y = \left(\frac{x+3}{x-4}\right)^{\frac{1}{6}}$; 3) $y = (4-x)^{\frac{1}{5}}$; 4) $y = (2+x-x^2)^{0,25}$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = (x-8)^2$; 2) $y = -0,5x^4 + 3$; 3) $y = (x+1)^{-5}$; 4) $y = 2x^{\frac{5}{3}} - 1$;
5) $y = -0,5x^3$; 6) $y = (x+3)^5$; 7) $y = 0,5x^{\frac{1}{4}}$; 8) $y = (x-2)^{\frac{4}{3}}$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = (2x-1)^{-4}$; 2) $y = (0,25x-2)^2$; 3) $y = (5x+10)^{\frac{1}{3}}$;
4) $y = (|x|+2)^{\frac{5}{2}}$; 5) $y = |(x+2)^{-2} - 2|$; 6) $y = |(x-2)^{-3} - 3|$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\left(\frac{x}{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}$; 2) $y = -3(x+4)^{\frac{2}{3}} + 1$; 3) $y = \frac{1}{2}(3-x)^{\frac{3}{4}}$; 4) $y = 4(x+6)^{\frac{1}{5}} - 2$.

5. Побудуйте графік функції та знайдіть її область визначення:

1) $y = (2x-3)^{\frac{1}{2}}$; 2) $y = (3-x)^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = (x+5)^{-\frac{3}{4}}$; 4) $y = (4x)^{\frac{5}{3}}$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|^{\frac{1}{2}}$; 2) $y = (2|x|-1)^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = 4|x|^{\frac{3}{5}} - 1$; 4) $y = \left|4x^{\frac{3}{5}} - 1\right|$.

Рівень С

1. Побудуйте графік функції та визначте область визначення, множину значень та нулі функції:

1) $y = (x-3)^{-3}$; 2) $y = (x+1)^{-4}$; 3) $y = |2x+4|^{\frac{1}{2}}$; 4) $y = 2(x-1)^{-\frac{1}{3}}$.

2. Побудуйте графік функції та укажіть множину значень функції:

1) $y = (3x-2)^{\frac{1}{3}} + 1$; 2) $y = (1-2x)^{\frac{2}{5}} - 4$; 3) $y = (5x+10)^{\frac{3}{4}} - 3$; 3) $y = (x-7)^{\frac{4}{3}} + 2$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x-2|^{\frac{1}{2}} + 3$; 2) $y = -|x+4|^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = 2|3-x|^{\frac{1}{4}} - 1$; 4) $y = |2x+1|^{\frac{5}{6}} - 5$.

4. Побудуйте графік функції та визначте проміжки монотонності:

1) $y = (x+3)^{\frac{3}{5}}$; 2) $y = -(x-1)^{\frac{4}{7}}$; 3) $y = |x|^{\frac{2}{3}}$; 4) $y = (2-x)^{\frac{1}{3}} + 2$.

5. Побудуйте графік функції та укажіть нулі функції, якщо вони існують:

1) $y = (x-4)^{\frac{4}{3}}$; 2) $y = (2x+1)^{\frac{7}{5}}$; 3) $y = (5-x)^{\frac{6}{5}}$; 4) $y = 3(x+2)^{\frac{8}{7}}$.

6. Спростіть вираз і побудуйте графік функції за допомогою геометричних перетворень:

1) $y = (8x - 16)^{\frac{1}{3}};$

2) $y = \left(\frac{x-3}{9}\right)^{\frac{1}{2}}.$

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-
- 3) У мене залишилися запитання щодо
-
-

Можливі теми проєктів

1. Побудова графіків степеневих функцій за геометричними перетвореннями графіків базових функцій.
2. Степеневі функції з дробовими показниками у біології та в фізиці.
3. Властивості степенєвої функції з дробовими показниками.