

Урок 13. Розв'язування рівнянь та систем рівнянь за допомогою степеневої функції**РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) застосуєте властивості степневих функцій з натуральними, цілими та раціональними показниками;
- 2) розв'яжете рівняння та системи рівнянь графічним методом;
- 3) навчитеся визначати розв'язки рівнянь і систем рівнянь шляхом аналізу точок перетину графіків;
- 4) зможете застосовувати графічний метод до практичних задач, оцінювати кількість розв'язків та робити висновки про поведінку функцій.

II. Повторення**1.** Знайдіть область визначення $y = (3 - x)^{\frac{1}{2}} - x^{-1}$.**2.** Спростіть вирази:

1) $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}};$

2) $\left(x^{-2} y^{\frac{1}{3}}\right)^{-3};$

3) $\left(x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}\right)^2.$

3. Запишіть проміжки зростання функції:

1) $y = x^{\frac{3}{5}};$

2) $y = -x^{-3};$

3) $y = (x - 2)^{\frac{1}{3}}.$

4. Укажіть область визначення функції $y = \sqrt[4]{4 - x^2}.$

5. Якщо $f(x) = x^{-3}$, $g(x) = x^0$, $h(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, то при $x = 2$ виконується нерівність:
- А $f(x) < g(x) < h(x)$
 - Б $f(x) < h(x) < g(x)$
 - В $h(x) < f(x) < g(x)$
 - Г $g(x) < h(x) < f(x)$
 - Д $g(x) < f(x) < h(x)$

III. Графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь, що містять степеневі функції з натуральними, цілими та раціональними показниками

Схема розв'язування рівняння графічним методом

1. Будуємо графік лівої частини рівняння.
2. Будуємо графік правої частини рівняння.
3. Визначаємо координати точок перетину графіків, абсциси яких є коренями рівняння.

Нехай дано систему рівнянь $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x), \end{cases}$ де $f(x)$ або $g(x)$ — степеневі функції. Кількість

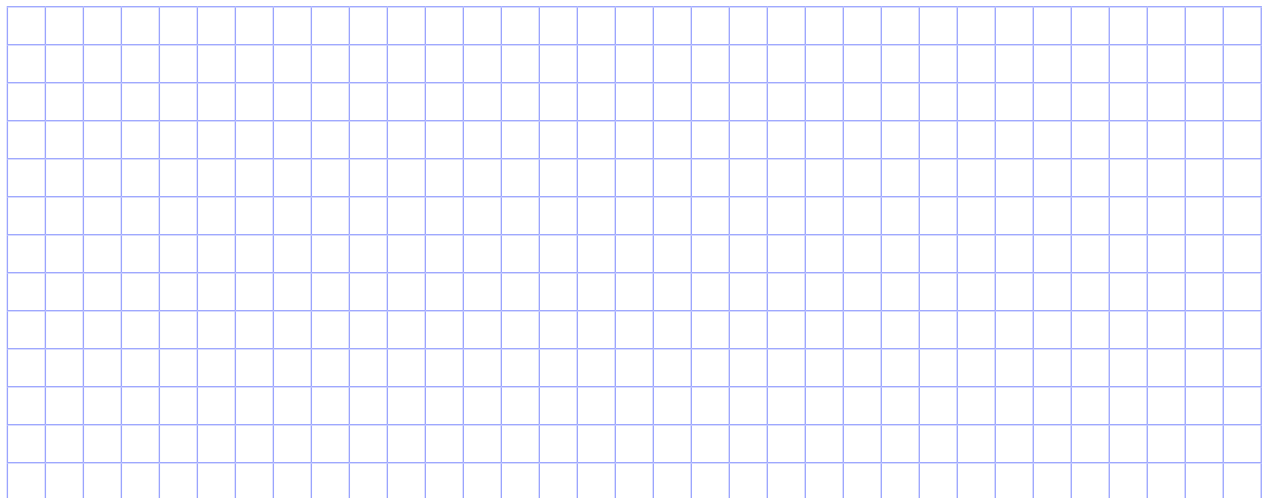
розв'язків системи відповідає кількості точок перетину графіків цих рівнянь.

Основною метою використання графічного методу розв'язування рівнянь та систем рівень є визначення кількості розв'язків (коренів) рівняння або системи рівнянь.

Схема розв'язування систем рівнянь графічним методом

1. Будуємо графік кожного рівняння системи.
2. Визначаємо всі точки перетину графіків.
3. Записуємо координати точок перетину графіків, які є розв'язками системи.

Приклад 1. Скільки коренів має рівняння $\frac{5}{x^6} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3}$?



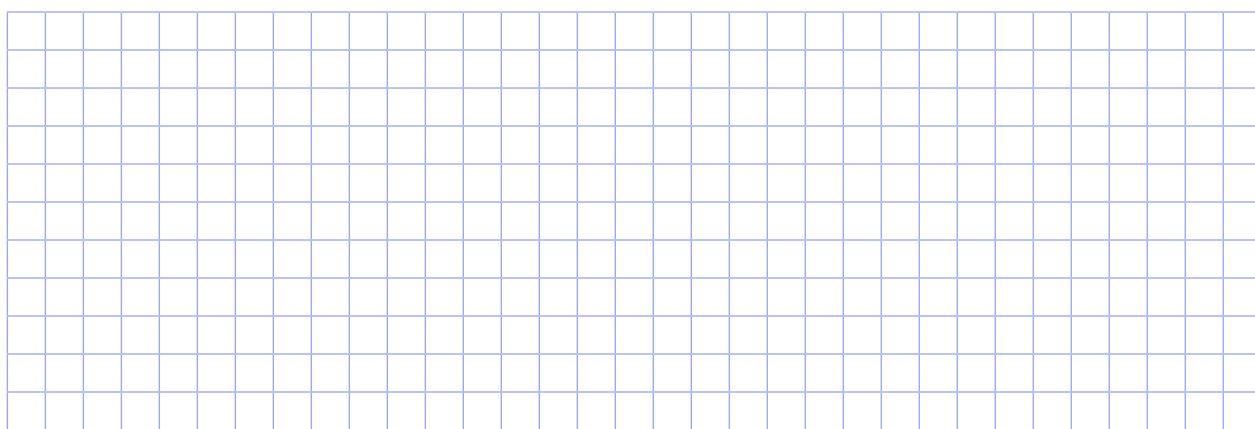
IV. Графічний метод розв'язування нерівностей, що містять степеневі функції

Схема розв'язування нерівностей графічним методом.

Нехай дано нерівність виду $f(x) < g(x)$.

1. Визначаємо область визначення функції $f(x)$ і $g(x)$ або область допустимих значень нерівності.
2. В одній координатній площині будуємо графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$.
3. Визначаємо точки перетину побудованих графіків функцій.
4. Визначаємо проміжки, на яких виконується початкова нерівність. Наприклад, якщо $f(x) < g(x)$, то знаходимо проміжки значення x при яких функція $f(x)$ знаходиться нижче функції $g(x)$. Враховуємо ОДЗ нерівності.

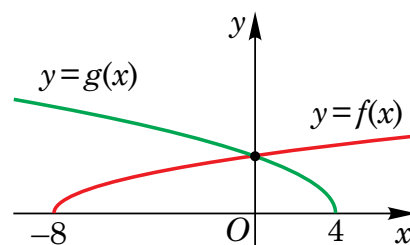
Приклад 2. Укажіть множину розв'язків нерівності $\sqrt[4]{x} < x^{-2}$.



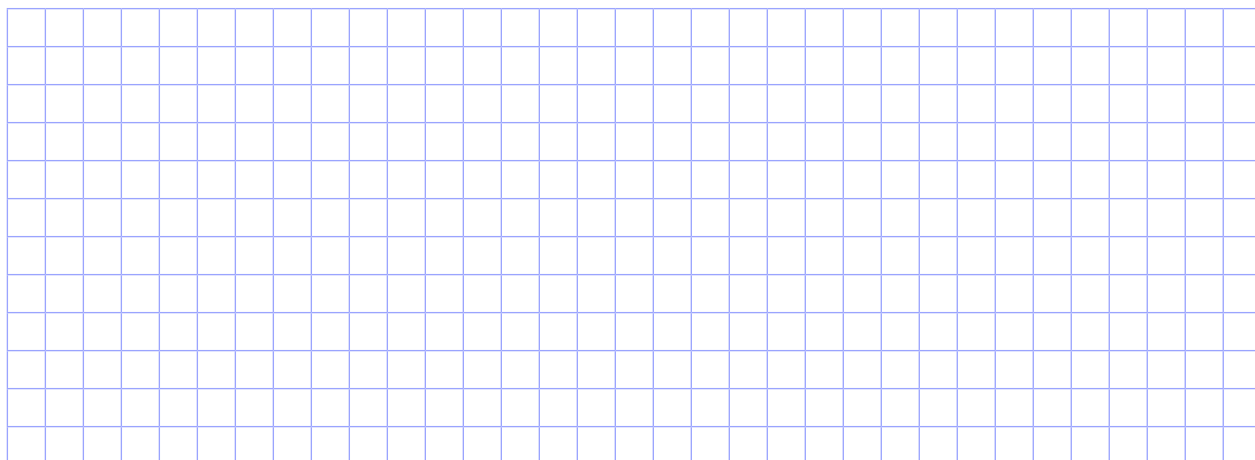
Приклад 3. На рисунку зображено графіки функцій

$$g(x) = \sqrt{4-x} \quad \text{і} \quad f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x+8}.$$

Укажіть проміжок, на якому виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$. (ЗНО, 2008 р.)



Приклад 4. При якому найбільшому від'ємному значенні параметра a рівняння $\sqrt[4]{|x|} - 3 - 2x = a$ має один корінь? (ЗНО, 2013 р.)



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У місті встановили новий сенсор для вимірювання рівня забруднення повітря у районі промислової зони. Концентрація шкідливих частинок $C(t)$ (в умовних одиницях) залежить від часу роботи системи очищення за формулою: $C(t) = 40 - 5 \cdot t^{\frac{2}{3}}$, де t — час у годинах від моменту запуску системи. Система вважається ефективною, якщо рівень забруднення знижується до 25 одиниць або нижче.

- 1) Скільки разів система очистки досягне безпечного рівня за перші 24 роботи?
- 2) Через скільки годин система очистки вперше досягне безпечного рівня?
- 3) Якого значення набуде $C(t)$ через 2 години після запуску системи.
- 4) Опишіть загальну тенденцію роботи системи. Збільшуватиметься чи зменшуватиметься кількість шкідливих частинок у повітрі?

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Установіть кількість коренів рівняння графічним методом:
1) $x^2 = 3$; 2) $x^{-0,5} = 2$; 3) $x^{-1} = 1,5$; 4) $x^3 = -1$;
5) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; 6) $x^{-2} = 0,5$; 7) $x^{\frac{2}{3}} = 4$; 8) $x^{-\frac{3}{2}} = -1$.
2. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-1} \leq 3-x$ графічним методом.
3. Укажіть кількість коренів рівняння $f(x) = g(x)$, якщо $f(x) = x^{-2}$, $g(x) = x^4$.
4. Скільки коренів має рівняння $f(x) = 1$, якщо $f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$?
5. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; 2) $x^{\frac{1}{3}} = 0$; 3) $x^{\frac{1}{6}} = 1$; 4) $x^{\frac{1}{2}} = 3$.
6. Чи має корені рівняння:
1) $x^{\frac{4}{5}} = -1$; 2) $x^0 = 4$; 3) $x^{1,8} = 1,8$; 4) $x^{-8} = 0,01$?
7. Розв'яжіть графічно рівняння:
1) $x^4 = x$; 2) $x^{0,5} = 2-x$; 3) $2x^5 = 3-x$.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння графічним методом:
1) $\sqrt[3]{x} + 2x^2 = 0$; 2) $x^{\frac{1}{4}} + 5x^{\frac{3}{2}} = 0$; 3) $x^{\frac{3}{5}} - x^3 = 0$; 4) $x^{-2} - 3x^{\frac{3}{2}} = -1$.
2. Установіть кількість коренів рівняння графічним методом:
1) $2x^6 = x + 4$; 2) $x^{-4} = 3-x$; 3) $3x^{\frac{3}{4}} = x^2$;
4) $x^7 = 2x^3$; 5) $x^{\frac{5}{2}} = 1-2x$; 6) $x^{\frac{9}{5}} = -x$.

3. Установіть кількість розв'язків системи рівнянь графічним методом:

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{cases} y = x^{\frac{1}{3}}, \\ y = 2x + 3; \end{cases} & 2) \begin{cases} y = x^{-\frac{1}{2}} + 1, \\ y = -x^{\frac{3}{2}} + 4; \end{cases} & 3) \begin{cases} y = -x^{\frac{3}{2}}, \\ y = -x^{-2} + 1; \end{cases} \\
 4) \begin{cases} y = x^{-\frac{1}{3}}, \\ y = 2x^3 - 3; \end{cases} & 5) \begin{cases} y = x^{\frac{1}{2}} - 3, \\ y = -x^{-1} + 2; \end{cases} & 6) \begin{cases} y = x^{-2} + 1, \\ y = -x^3 + 4. \end{cases}
 \end{array}$$

4. Скільки коренів має рівняння:

$$1) 0,5|x| = x^2 - 1; \quad 2) \sqrt[3]{x} + 2x^2 = 0?$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x-1)^{\frac{1}{2}} = 5; \quad 2) (x+1)^{\frac{1}{5}} = 0; \quad 3) (x-2)^{-\frac{1}{3}} = 0; \quad 4) (x^2-2)^{0,5} = \sqrt{7}.$$

6. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^{\frac{1}{2}} = 6 - x; \quad 2) x^{\frac{2}{3}} = x^{-2}; \quad 3) x^{\frac{1}{3}} = x^3; \quad 4) x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{2}{3}}.$$

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність графічним методом:

$$1) \sqrt{x-1} \leq 3-x; \quad 2) \sqrt{4-x} \geq \sqrt{x+8}.$$

2. Установіть кількість коренів рівняння в залежності від значень параметра a :

$$1) 2x^{\frac{1}{3}} = x + a; \quad 2) x^{\frac{1}{2}} = a - x; \quad 3) 2x^{\frac{3}{2}} = (x+a)^2; \quad 4) x^{-2} = a - 2x.$$

3. Використовуючи монотонність функцій, розв'яжіть рівняння:

$$1) x^{\frac{3}{2}} = 12 - x; \quad 2) x^{\frac{1}{3}} = 10 - x; \quad 3) x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{8}; \quad 4) x^{\frac{3}{2}} = 16x^{\frac{1}{2}}.$$

4. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) |x-2|^{\frac{1}{3}} = 2; \quad 2) (x-2)^{\frac{1}{3}} = 2; \quad 3) (|x|-5)^{\frac{1}{3}} = 2; \quad 4) (x-5)^2 = |x-5|^{\frac{1}{3}}.$$

5. Яке з рівнянь: 1) $\sqrt{x+1} = |x|$; 2) $4x^5 = \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$; 3) $\sqrt{|x|} = x^2$ має три корені?

6. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x^2 - 7x)^{\frac{2}{3}} = 4; \quad 2) (x^2 - 9)^{-0,75} = \frac{1}{8}; \quad 3) (x^2 + 6x)^{\frac{3}{4}} = 8; \quad 4) (x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{25}.$$

7. Скільки коренів має рівняння:

$$1) x^6 - x = 2; \quad 2) x^5 + 2x = 3; \quad 3) x^{-\frac{4}{5}} - x^2 = 1 + 2x; \quad 4) x^{0,8} - 4 = x^2 - 4x?$$

Рефлексія

1) На уроці я дізнався/дізналася

- 2) Мені найбільше запам'яталося
-
-
- 3) Для мене було найцікавішим
-
-
- 4) Для мене було найскладнішим
-
-
- 5) Я припустився/припустилася помилки
-
-
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
-
-
- 7) Поради собі до наступного уроку
-
-

Можливі теми проєктів

1. Застосування степеневих функцій у техніці: сенсори, датчики та вимірювальні системи.
2. Степеневі моделі у біології.
3. Фрактали та степеневі функції.
4. Економічні моделі, що описуються степеневими функціями: попит, пропозиція,
5. Порівняння степеневих функцій з різними показниками: натуральними, цілими та раціональними.

