

Урок 13. Розв'язування рівнянь та систем рівнянь за допомогою степеневої функції

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок

План уроку

1. Повторення.
2. Графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь, що містять степеневі функції із натуральними, цілими та раціональними показниками.
3. Графічний метод розв'язування нерівностей, що містять степеневі функції із раціональними показниками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в специфічній проблемній ситуації, достовірність їх [12 МАО 3.1.1–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна за графіком функції передбачити, скільки розв'язків матиме рівняння?

2) Чи можна за графіком функції визначити кількість коренів рівняння?

3) У яких життєвих ситуаціях може знадобитися вміння аналізувати графіки?

4) Чому важливо розуміти поведінку функції, перш ніж починати робити обчислення?

5) Чи може бути графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь ефективнішим за аналітичний метод?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть область визначення $y = (3 - x)^{\frac{1}{2}} - x^{-1}$.

Відповідь. $(-\infty; 0) \cup (0; 3]$.

2. Спростіть вирази:

1) $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{5}{4}}}{x^{-\frac{1}{2}}}$;

2) $\left(x^{-2}y^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$;

3) $\left(x^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}}\right)^2$.

Відповідь. 1) $x^{\frac{3}{4}}$; 2) $\frac{x^6}{y}$; 3) $x^{\frac{1}{2}} - 2 + x^{\frac{1}{2}}$.

3. Запишіть проміжки зростання функції:

1) $y = x^{\frac{3}{5}}$;

2) $y = -x^{-3}$;

3) $y = (x - 2)^{\frac{1}{3}}$.

Відповідь. 1) $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $[3; +\infty)$.

4. Укажіть область визначення функції $y = \sqrt[4]{4 - x^2}$.

Відповідь. $[-2; 2]$.

5. Якщо $f(x) = x^{-3}$, $g(x) = x^0$, $h(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, то при $x = 2$ виконується нерівність:
- А $f(x) < g(x) < h(x)$
 - Б $f(x) < h(x) < g(x)$
 - В $h(x) < f(x) < g(x)$
 - Г $g(x) < h(x) < f(x)$
 - Д $g(x) < f(x) < h(x)$
- Відповідь. Б.

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** У місті встановили новий сенсор для вимірювання рівня забруднення повітря у районі промислової зони. Концентрація шкідливих частинок $C(t)$ (в умовних одиницях) залежить від часу роботи системи очищення за формулою: $C(t) = 40 - 5 \cdot t^{\frac{2}{3}}$, де t — час у годинах від моменту запуску системи. Система вважається ефективною, якщо рівень забруднення знижується до 25 одиниць або нижче.
- 1) Скільки разів система очистки досягне безпечного рівня за перші 24 роботи?
 - 2) Через скільки годин система очистки вперше досягне безпечного рівня?
 - 3) Якого значення набуде $C(t)$ через 2 години після запуску системи.
 - 4) Опишіть загальну тенденцію роботи системи. Збільшуватиметься чи зменшуватиметься кількість шкідливих частинок у повітрі?

III. Графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь, що містять степеневі функції з натуральними, цілими та раціональними показниками

Схема розв'язування рівняння графічним методом

1. Будуємо графік лівої частини рівняння.
2. Будуємо графік правої частини рівняння.
3. Визначаємо координати точок перетину графіків, абсциси яких є коренями рівняння.

Нехай дано систему рівнянь $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x), \end{cases}$ де $f(x)$ або $g(x)$ — степеневі функції. Кількість

розв'язків системи відповідає кількості точок перетину графіків цих рівнянь

Основною метою використання графічного методу розв'язування рівнянь та систем рівень є визначення кількості розв'язків (коренів) рівняння або системи рівнянь.

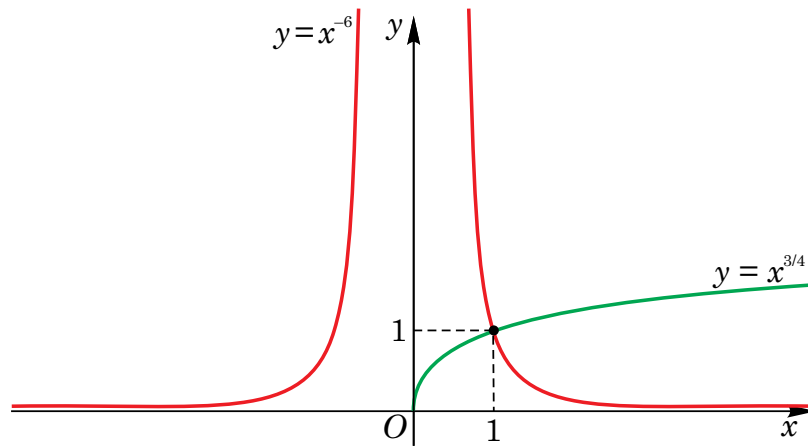
Схема розв'язування систем рівнянь графічним методом

1. Будуємо графік кожного рівняння системи.
2. Визначаємо всі точки перетину графіків.
3. Записуємо координати точок перетину графіків, які є розв'язками системи.

Ілюстративний приклад

6. Скільки коренів має рівняння $\frac{5}{x^6} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3}$?

Розв'язання. Виконаємо схематичну побудову графіків функцій $y = \frac{5}{x^6}$ та $y = \frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3}$. При схематичній побудові можна навіть не враховувати коефіцієнт 5 для першої функції та $\frac{1}{3}$ для другої функції. Тобто побудуємо графіки функції $y = \frac{1}{x^6}$ та $y = \sqrt[4]{x^3}$, оскільки числа 5 і $\frac{1}{3}$ не впливають на кількість коренів рівняння.



Оскільки графіки перетинаються в одній точці, то рівняння має один корінь.
Відповідь. Один корінь.

IV. Графічний метод розв'язування нерівностей, що містять степеневі функції

Схема розв'язування нерівностей графічним методом.

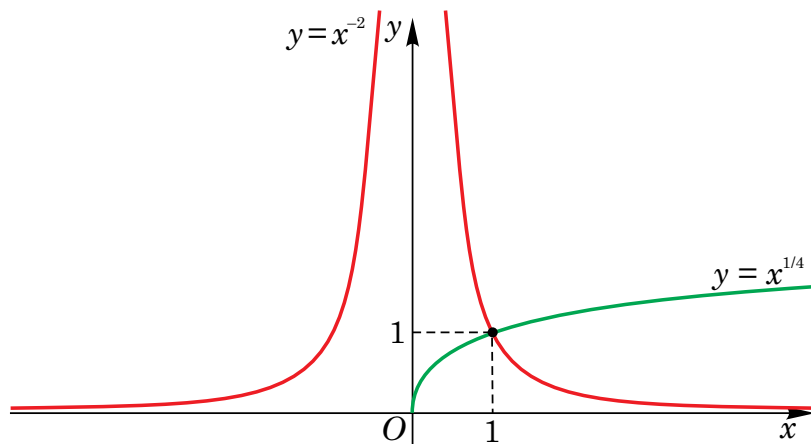
Нехай дано нерівність виду $f(x) < g(x)$.

1. Визначаємо область визначення функції $f(x)$ і $g(x)$ або область допустимих значень нерівності.
2. В одній координатній площині будуємо графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$.
3. Визначаємо точки перетину побудованих графіків функцій.
4. Визначаємо проміжки, на яких виконується початкова нерівність. Наприклад, якщо $f(x) < g(x)$, то знаходимо проміжки значення x при яких функція $f(x)$ знаходиться нижче функції $g(x)$. Враховуємо ОДЗ нерівності.

Ілюстративні приклади

7. Укажіть множину розв'язків нерівності $\sqrt[4]{x} < x^{-2}$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функції $f(x) = \sqrt[4]{x}$ та $g(x) = x^{-2}$ (див. рисунок).



Графіки функції $f(x)$ і $g(x)$ перетинаються у точці $x = 1$. За умовою, $f(x) < g(x)$, тобто вибираємо значення функції $f(x)$, які менші від відповідних значень функції $g(x)$. Маємо проміжок $(0; 1)$. Щоб отримати правильні розв'язки нерівності, треба визначити область визначення функції $f(x)$ і $g(x)$, або область допустимих значень нерівності.

Для функції $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x \in [0; +\infty)$, для функції $g(x) = x^{-2}$, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

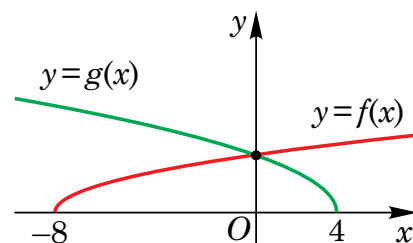
Отже, $x \in (0; 1)$.

Відповідь. $(0; 1)$.

8. На рисунку зображено графіки функцій $g(x) = \sqrt{4-x}$

і $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x+8}$. Укажіть проміжок, на якому виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$. (ЗНО, 2008 р.)

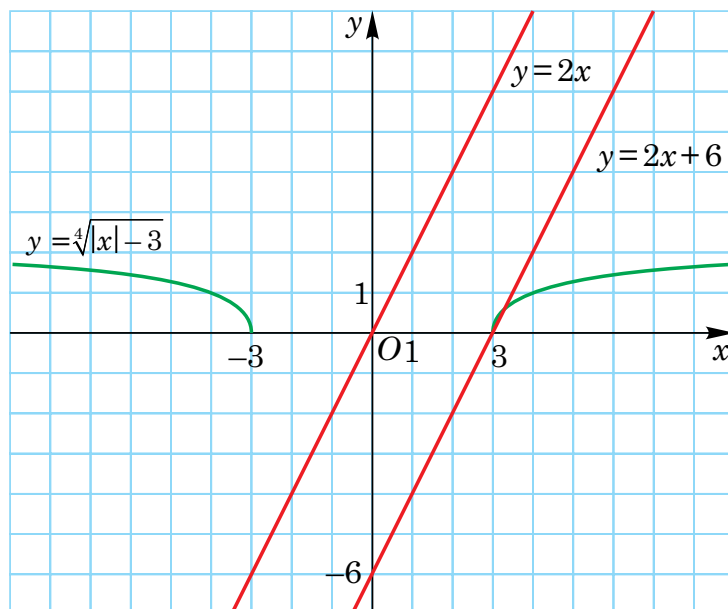
Відповідь. $[-8; 0]$.



9. При якому найбільшому від'ємному значенні параметра a рівняння $\sqrt[4]{|x|-3} - 2x = a$ має один корінь? (ЗНО, 2013 р.).

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $\sqrt[4]{|x|-3} = a + 2x$. В одній системі координат побудуємо графіки лівої й правої частини рівняння: $y = \sqrt[4]{|x|-3}$ і $y = a + 2x$.

Пряма $y = 2x + a$ утворюється паралельним перенесенням прямої $y = 2x$ залежно від значень параметра a . Оскільки, за умовою, потрібно знайти найбільший цілий від'ємний корінь, то розглянемо точки перетину прямої $y = 2x + a$ з графіком, який лежить праворуч від $x = 3$. Якщо $a \in (-\infty; -6]$, то матимемо одну точку перетину прямої $y = 2x + a$ із частиною графіка функції $y = \sqrt[4]{|x|-3}$. Якщо $a = -6$, то пряма перетинатиме графік функції $y = \sqrt[4]{|x|-3}$ в одній точці $x = 3$. Отже, найбільше від'ємне значення параметра $a = -6$.



Відповідь. -6.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У місті встановили новий сенсор для вимірювання рівня забруднення повітря у районі промислової зони. Концентрація шкідливих частинок $C(t)$ (в умовних одиницях) залежить від часу роботи системи очищення за формулою: $C(t) = 40 - 5 \cdot t^{\frac{2}{3}}$, де t — час у годинах від моменту запуску системи. Система вважається ефективною, якщо рівень забруднення знижується до 25 одиниць або нижче.

- 1) Скільки разів система очистки досягне безпечного рівня за перші 24 роботи?
- 2) Через скільки годин система очистки вперше досягне безпечного рівня?
- 3) Якого значення набуде $C(t)$ через 2 години після запуску системи.
- 4) Опишіть загальну тенденцію роботи системи. Збільшуватиметься чи зменшуватиметься кількість шкідливих частинок у повітрі?

Розв'язання.

1) Система досягне безпечного рівня якщо $C(t) = 25$. Тобто, потрібно розв'язати рівняння

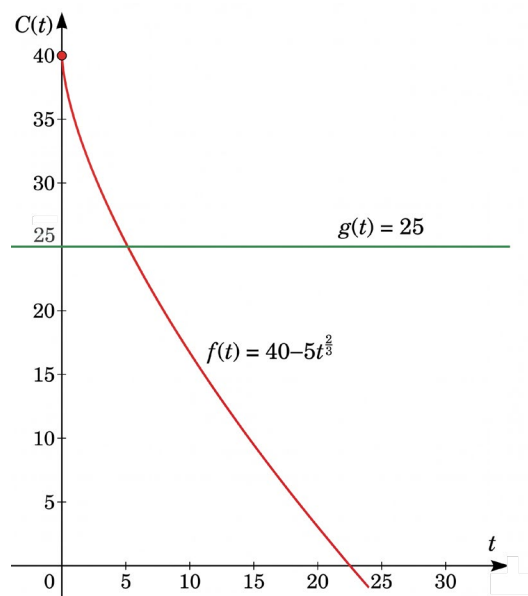
$40 - 5 \cdot t^{\frac{2}{3}} = 25$. Побудуємо графіки функцій

$f(t) = 40 - 5 \cdot t^{\frac{2}{3}}$ і $g(t) = 25$ на проміжку

$[0; 25]$ (див. рисунок).

Графіки функцій мають одну точку перетину, отже рівняння $f(t) = g(t)$ має один корінь. Тому система очистки досягне безпечного рівня за перші 24 години роботи один раз, після чого рівень забруднення буде зменшуватись.

2) Знайдемо точне значення t при якому $f(t) = g(t)$:



$$40 - 5 \cdot t^{\frac{2}{3}} = 25, \quad -5 \cdot t^{\frac{2}{3}} = -15, \quad t^{\frac{2}{3}} = 3, \quad \left(t^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 3^3, \quad t^2 = 27, \quad \text{звідси } t = \sqrt{27} \approx 5,2 \text{ (год)}.$$

Другий корінь від'ємний, тому він не задовольняє умову задачі.

Отже, система очистки вперше досягне безпечного рівня приблизно через 5 год 12 хв.

3) Знайдемо значення $C(t)$ при $t = 2$:

$$C(2) = 40 - 5 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 40 - 7,95 = 32,05 \text{ (од)}.$$

Отже, $C(t)$ набуде значення 32,05 умовні одиниці через 2 години від початку роботи.

4) Оскільки функція $C(t)$ спадає на своїй області визначення, то кількість забруднення зменшуватиметься зі збільшенням часу роботи системи. При значенні t_0 , для якого $C(t_0) = 0$, рівень забруднення стане нульовим. Для $t > t_0$ функція вже не матиме змісту для даної задачі. Знайдемо значення t_0 , якщо $C(t) = 0$:

$$40 - 5 \cdot t^{\frac{2}{3}} = 0, \quad -5 \cdot t^{\frac{2}{3}} = -40, \quad t^{\frac{2}{3}} = 8, \quad t \approx 22,7 \text{ (год)}.$$

Отже, кількість шкідливих частинок у повітрі буде зменшуватись і після 22 годин 42 хв повітря очиститься.

Відповідь. 1) один раз; 2) через 5 год 12 хв; 3) 32,05 ум. од; 4) зменшується.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Установіть кількість коренів рівняння графічним методом:

- | | | | |
|----------------------------|---------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 1) $x^2 = 3$; | 2) $x^{-0,5} = 2$; | 3) $x^{-1} = 1,5$; | 4) $x^3 = -1$; |
| 5) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; | 6) $x^{-2} = 0,5$; | 7) $x^{\frac{2}{3}} = 4$; | 8) $x^{\frac{3}{2}} = -1$. |

2. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-1} \leq 3-x$ графічним методом.

3. Укажіть кількість коренів рівняння $f(x) = g(x)$, якщо $f(x) = x^{-2}$, $g(x) = x^4$.

4. Скільки коренів має рівняння $f(x) = 1$, якщо $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$?

5. Розв'яжіть рівняння:

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; | 2) $x^{\frac{1}{3}} = 0$; | 3) $x^{\frac{1}{6}} = 1$; | 4) $x^{\frac{1}{2}} = 3$. |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

6. Чи має корені рівняння:

- | | | | |
|-----------------------------|----------------|----------------------|----------------------|
| 1) $x^{\frac{4}{5}} = -1$; | 2) $x^0 = 4$; | 3) $x^{1,8} = 1,8$; | 4) $x^{-8} = 0,01$? |
|-----------------------------|----------------|----------------------|----------------------|

7. Розв'яжіть графічно рівняння:

- | | | |
|----------------|------------------------|---------------------|
| 1) $x^4 = x$; | 2) $x^{0,5} = 2 - x$; | 3) $2x^5 = 3 - x$. |
|----------------|------------------------|---------------------|

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння графічним методом:

- | | | | |
|-------------------------------|---|----------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\sqrt[3]{x} + 2x^2 = 0$; | 2) $x^{\frac{1}{4}} + 5x^{\frac{3}{2}} = 0$; | 3) $x^{\frac{3}{5}} - x^3 = 0$; | 4) $x^{-2} - 3x^{\frac{3}{2}} = -1$. |
|-------------------------------|---|----------------------------------|---------------------------------------|

2. Установіть кількість коренів рівняння графічним методом:

1) $2x^6 = x + 4$; 2) $x^{-4} = 3 - x$; 3) $3x^{\frac{3}{4}} = x^2$;
4) $x^7 = 2x^3$; 5) $x^{\frac{5}{2}} = 1 - 2x$; 6) $x^{\frac{9}{5}} = -x$.

3. Установіть кількість розв'язків системи рівнянь графічним методом:

1) $\begin{cases} y = x^{\frac{1}{3}}, \\ y = 2x + 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-\frac{1}{2}} + 1, \\ y = -x^{\frac{3}{2}} + 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = -x^{\frac{3}{2}}, \\ y = -x^{-2} + 1; \end{cases}$
4) $\begin{cases} y = x^{-\frac{1}{3}}, \\ y = 2x^3 - 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y = x^{\frac{1}{2}} - 3, \\ y = -x^{-1} + 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y = x^{-2} + 1, \\ y = -x^3 + 4. \end{cases}$

4. Скільки коренів має рівняння:

1) $0,5|x| = x^2 - 1$; 2) $\sqrt[3]{x} + 2x^2 = 0$?

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-1)^{\frac{1}{2}} = 5$; 2) $(x+1)^{\frac{1}{5}} = 0$; 3) $(x-2)^{-\frac{1}{3}} = 0$; 4) $(x^2-2)^{0,5} = \sqrt{7}$.

6. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$; 2) $x^{\frac{2}{3}} = x^{-2}$; 3) $x^{\frac{1}{3}} = x^3$; 4) $x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{2}{3}}$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність графічним методом:

1) $\sqrt{x-1} \leq 3 - x$; 2) $\sqrt{4-x} \geq \sqrt{x+8}$.

2. Установіть кількість коренів рівняння в залежності від значень параметра a :

1) $2x^{\frac{1}{3}} = x + a$; 2) $x^{-\frac{1}{2}} = a - x$; 3) $2x^{\frac{3}{2}} = (x+a)^2$; 4) $x^{-2} = a - 2x$.

3. Використовуючи монотонність функцій, розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\frac{3}{2}} = 12 - x$; 2) $x^{\frac{1}{3}} = 10 - x$; 3) $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{8}$; 4) $x^{\frac{3}{2}} = 16x^{-\frac{1}{2}}$.

4. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $|x-2|^{\frac{1}{3}} = 2$; 2) $(x-2)^{\frac{1}{3}} = 2$; 3) $(|x|-5)^{\frac{1}{3}} = 2$; 4) $(x-5)^2 = |x-5|^{\frac{1}{3}}$.

5. Яке з рівнянь: 1) $\sqrt{x+1} = |x|$; 2) $4x^5 = \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$; 3) $\sqrt{|x|} = x^2$ має три корені?

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 - 7x)^{\frac{2}{3}} = 4$; 2) $(x^2 - 9)^{-0,75} = \frac{1}{8}$; 3) $(x^2 + 6x)^{\frac{3}{4}} = 8$; 4) $(x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{25}$.

7. Скільки коренів має рівняння:

1) $x^6 - x = 2$; 2) $x^5 + 2x = 3$; 3) $x^{-\frac{4}{5}} - x^2 = 1 + 2x$; 4) $x^{0,8} - 4 = x^2 - 4x$?

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
.....
.....
- 2) Мені найбільше запам'яталося
.....
.....
- 3) Для мене було найцікавішим
.....
.....
- 4) Для мене було найскладнішим
.....
.....
- 5) Я припустився/припустилася помилки
.....
.....
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.....
.....
- 7) Поради собі до наступного уроку
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Застосування степеневих функцій у техніці: сенсори, датчики та вимірювальні системи.
2. Степеневі моделі у біології.
3. Фрактали та степеневі функції.
4. Економічні моделі, що описуються степеневими функціями: попит, пропозиція,
5. Порівняння степеневих функцій з різними показниками: натуральними, цілими та раціональними.

Список використаних джерел

- 1) Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.