

Тема 2.

Степенева функція

Урок 14–15. Узагальнення та систематизація знань

РОБОЧИЙ АРКУШ

(МОЄ ІМ'Я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

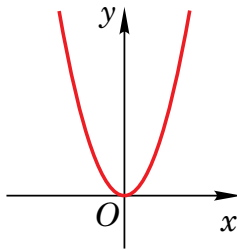
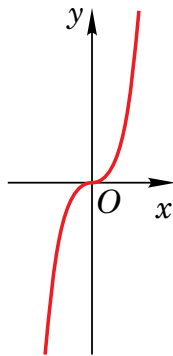
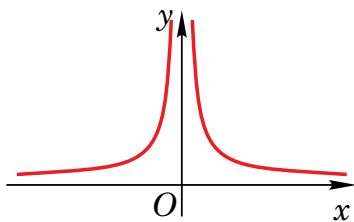
- 1) узагальните знання про властивості степеневих функцій з різними показниками степеня;
- 2) повторите правила побудови графіків степеневих функцій;
- 3) порівняйте графіки функцій з цілими, дробовими та від'ємними показниками;
- 4) проаналізуєте практичні приклади та задачі з використанням степеневих функцій;
- 5) попрацюєте в групах над практичною задачею та обговорите її розв'язання;
- 6) виконаєте тренувальні завдання для систематизації та узагальнення знань.

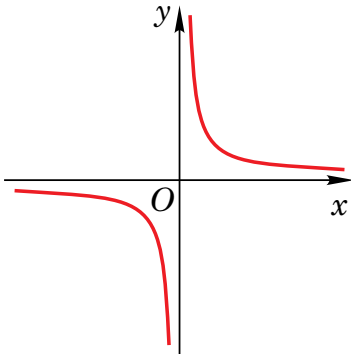
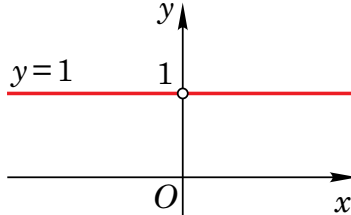
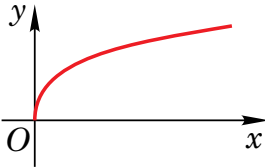
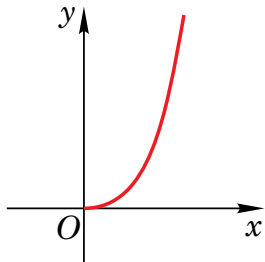
II. Повторення

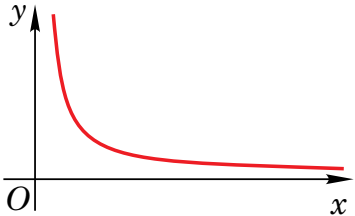
- 1.** Знайдіть область визначення функції $y = (2x + 6)^{\frac{1}{3}}$.
- 2.** Спростіть вираз $\left(\sqrt[5]{a^{-4}}\right)^{\frac{5}{16}} \cdot \left(a^{\frac{7}{8}}\right)^{\frac{4}{21}}$.
- 3.** Побудуйте графік функції $y = \left((x+4)^{-\frac{1}{7}}\right)^{-7}$.
- 4.** Знайдіть значення виразу $625^{-2,25} \cdot 25^{\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{25}{9}}$.
- 5.** Розв'яжіть рівняння $(x+4)^{1,6} = 256$.
- 6.** Функцію задано формулою $f(x) = x^{-16}$. Порівняйте:
1) $f(5,6)$ і $f(2,4)$; 2) $f(-2,8)$ і $f(-7,3)$.
- 7.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-3}$ на проміжку $[-3; -2]$.

III. Узагальнення властивостей функцій з різними показниками степеня

Повторюємо властивості степеневих функцій

1. Степенева функція	$y = x^n$, n — парне натуральне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Якщо $x \in (-\infty; 0]$, то функція спадає, якщо $x \in [0; +\infty)$, то функція зростає.
2. Степенева функція	$y = x^n$, n — непарне натуральне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (-\infty; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
3. Степенева функція	$y = x^k$, k — ціле від'ємне число, яке ділиться на 2 без остачі
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то функція зростає, якщо $x \in (0; +\infty)$, то функція спадає.

4. Степенева функція	$y = x^k, k$ — ціле від'ємне число, яке не ділиться на 2 без остачі
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення.
5. Степенева функція	$y = x^k, k = 0$
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y = 1$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Монотонна на всій області визначення.
6. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове додатне число, яке менше від 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
7. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове додатне число, яке більше за 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.

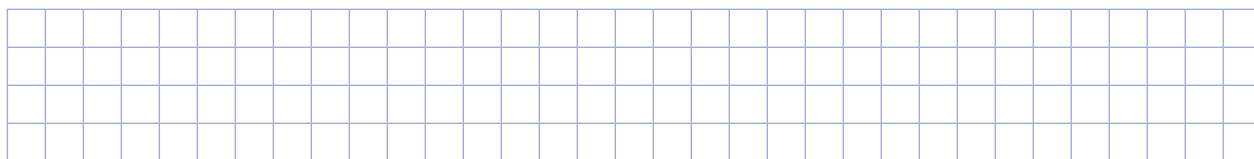
8. Степенева функція	$y = x^q$, q — дробове від'ємне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення.

Запропонуйте учням/ученицям дослідити властивості степеневих функцій за допомогою розробки GeoGebra.

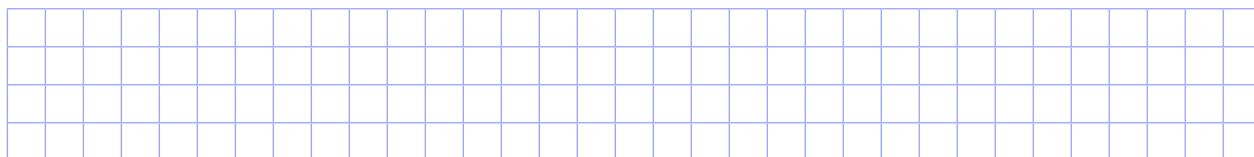
<https://www.geogebra.org/calculator/nzuwabtz> _____



Приклад 1. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \frac{(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}{x^2 - 36}$.

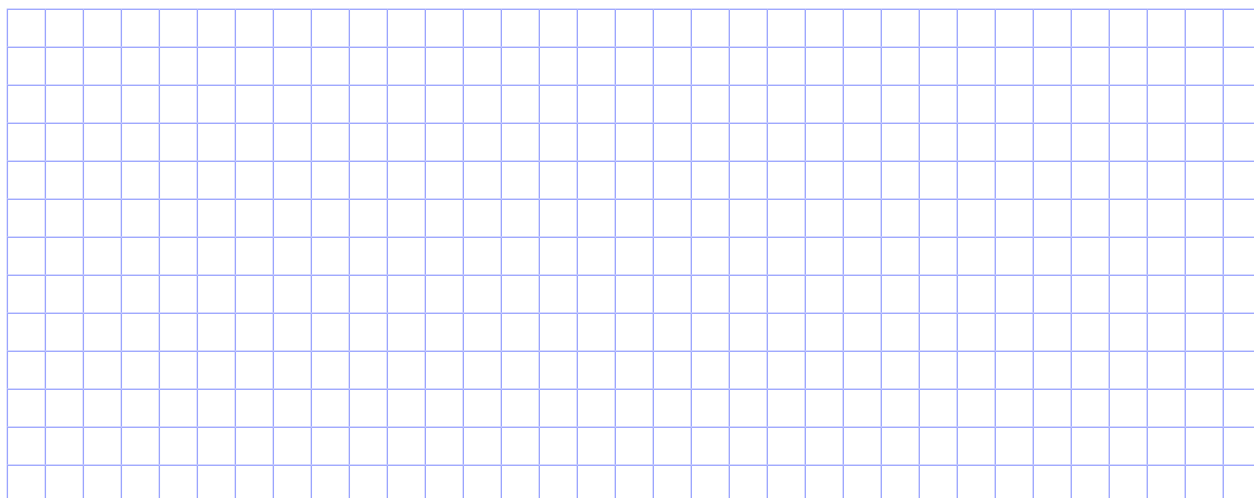


Приклад 2. Знайдіть нулі функції $y = 3x^2(x^3 - 8)^{\frac{2}{3}}$.

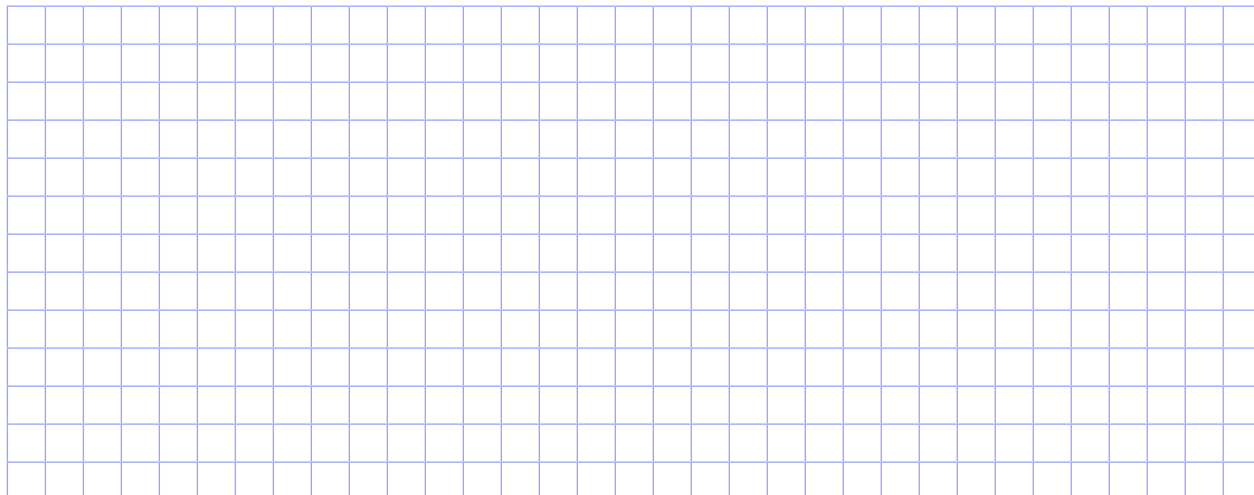


IV. Побудова графіків функцій з різними показниками степеня

Приклад 3. Побудуйте графік функції $y = (2x - 1)^{2.6}$.



Приклад 4. Побудуйте графік функції $y = 1 - 2(t + 3)^{\frac{3}{8}}$. Визначте множину значень.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую цю проблему?

Задача. Розробник програмного забезпечення для обробки великого масиву аналітичних даних, створив алгоритм сортування та обробки даних. Алгоритм має час виконання T (у секундах), який залежить від розміру масиву n (кількості елементів) за законом: $T = 0,01 \cdot n^{1,5}$, $n > 0$. Планується обробка масивів від 10 до 100 тисяч елементів.

- 1) Обчисліть час виконання алгоритму для масивів розміром $n = 10000$; 50000 ; 100000 .
- 2) Побудуйте графік функції $T(n)$ для $n \in [0; 400]$, у тис. шт.
- 3) Визначте, як змінюється час виконання при подвоєнні розміру масиву даних.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-18}$. Порівняйте:
 - 1) $f(1,8)$ і $f(3,6)$;
 - 2) $f(-2,5)$ і $f(-1,7)$;
 - 3) $f(-5,4)$ і $f(5,4)$;
 - 4) $f(0,9)$ і $f(-0,2)$.
2. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-5} + 1$ на проміжку $[2; 3]$.
3. Укажіть проміжки монотонності функції:
 - 1) $y = x^5$;
 - 2) $y = x^{-3}$;
 - 3) $y = x^{\frac{2}{5}}$;
 - 4) $y = x^{-0,3}$.
4. Побудуйте графіки функцій:
 - 1) $y = -3x^{5,2}$;
 - 2) $y = 4x^{-1,6}$;
 - 3) $y = x^{\frac{2}{5}} - 2$;
 - 4) $y = x^{-0,3} + 2$.
5. Побудуйте й порівняйте графіки функцій:
 - 1) $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = x^{\frac{1}{3}}$;
 - 2) $y = \sqrt[4]{x}$ і $y = x^{\frac{1}{4}}$.
6. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-\frac{4}{5}} = 0,0016$; 2) $(x - 5)^{2,5} = 243$; 3) $x^{-\frac{3}{5}} = 0,008$; 4) $(x + 6)^{\frac{1}{3}} = 625$.

7. Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = x^{\frac{2}{5}}$ на проміжку $[1; 32]$; 2) $y = x^{-\frac{4}{3}}$ на проміжку $\left[\frac{1}{8}; 27\right]$.

Рівень В

1. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left((x - 1)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}$; 2) $y = \left((x - 4)^{-\frac{1}{5}}\right)^{-5}$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x - 2)^{3,4}$; 2) $y = \left(\frac{x + 7}{x - 4}\right)^{2,1}$; 3) $y = x^{-1,2}$; 4) $y = (5 - 4x - x^2)^{-\frac{1}{7}}$.

3. Оцініть значення x , якщо:

1) $0,001 < x^{-\frac{4}{3}} < 0,008$; 2) $32 \leq x^{\frac{2}{5}} \leq 243$;
3) $\frac{1}{64} \leq x^{-\frac{4}{3}} < \frac{27}{64}$; 4) $0 \leq x^{\frac{3}{4}} \leq \frac{1}{64}$.

4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-\frac{3}{2}}$ на проміжках:

1) $[1; 9]$; 2) $[0,25; 4]$; 3) $[0; 1]$; 4) $[25; +\infty)$.

5. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = (x - 1)^{-0,3}$; 2) $f(x) = (x + 2)^{\frac{2}{5}}$; 3) $f(x) = (2x - 6)^{-\sqrt{3}}$; 4) $f(x) = (x + 7)^{-\sqrt{2}}$.

6. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$; 2) $x^{-\frac{1}{3}} = x^2$; 3) $x^{\frac{5}{2}} = 2 - x$; 4) $x^{\frac{1}{4}} = 2x - 1$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = -3(x + 1)^{\frac{2}{3}} + 2$; 2) $y = -4(x - 2)^{\frac{2}{3}} + 1$; 3) $y = 5(x + 5)^{\frac{1}{3}} + 4$; 4) $y = -2(x - 6)^{\frac{3}{5}} - 1$.

Рівень С

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x^2 - 5x + 4)^{1,7}$; 2) $y = \left(\frac{5x - 1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}$; 3) $y = \left(\frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 2}\right)^{0,9}$; 4) $y = \left(\frac{9 - x^2}{x + 1}\right)^{-5}$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\frac{x + 4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = (2x - 5)^{\frac{4}{3}}$; 3) $y = \left(\frac{x - 6}{4} + 1\right)^{\frac{7}{3}}$; 4) $y = \left(3 - \frac{x}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$.

3. Дано функції $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ і $g(x) = \frac{5x + 7}{x - 4}$. Знайдіть $f(g(5))$.

4. Для кожного значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

1) $x^{\frac{2}{3}} - 1 = x^2 + a$; 2) $a - (x - 5)^4 = x^{\frac{3}{4}}$.

5. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності:

1) $x^4 \leq 2 + x^{\frac{2}{3}}$;

2) $10 - x^3 > x^{\frac{2}{5}}$.

6. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $|x - 5|^2 = (x - 5)^{\frac{1}{3}}$;

2) $(|x| - 5)^2 = (|x| - 5)^{\frac{1}{3}}$.

7. При яких значеннях параметра a функція $y = ((2a + 3)x^2 - 2(a + 3)x + 4a)^{\frac{1}{3}}$ має два нулі, один із яких більший за 3, а другий менший від 2?

Рефлексія

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?







