

Урок 14–15. Узагальнення та систематизація знань

Тип уроку: узагальнення та систематизації.

План уроку

1. Повторення.
2. Узагальнення властивостей функцій з різними показниками степеня.
3. Побудова графіків функцій з різними показниками степеня.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П];

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії [12 МАО 4.3.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Матеріал розрахований на дві академічні години. Обирайте теми та приклади з урахуванням часових можливостей.
- 2) На початку уроку запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання. Використовуйте їх, щоб учні/учениці шукали відповіді та усвідомлювали свої знання, створюйте ситуацію успіху.
- 3) Для повторення та узагальнення запропонуйте учням/ученицям приклади на повторення, які допоможуть згадати раніше вивчений матеріал.
- 4) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 5) Подавайте теоретичний матеріал стисло та структуровано. Пропонуйте учням/ученицям самостійно заповнювати таблиці для систематизації знань.

6) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) До кожного теоретичного положення наводьте ілюстративні приклади. Обирайте їх на власний розсуд. Пропонуйте приклади для самостійної роботи учнів/учениць.

8) Добирайте обсяг та зміст завдань відповідно до навчальних цілей, можливостей учнів/учениць та відведеного часу.

9) Резервний час на уроці можна присвятити захисту учнівських/учениць проєктів, обговоренню і демонстрації виконаних робіт.

I. Організаційна частина (3–4 хв)

Мотиваційні запитання

1) Як обчислити значення степеня за властивостями степеневих функцій?

2) Чи можете ви передбачити вигляд графіка степеневих функцій, без його побудови?

3) Чи розумієте ви, коли степенева функція зростає, а коли спадає?

4) Чи можна пояснити різницю між функціями з різними показниками степеня?

5) У яких практичних процесах зустрічаються степеневі функції з дійсним показником?

6) Чи вмієте ви за графіком швидко «прочитати» властивості функції (зростання, спадання, нулі, область визначення)?

7) Чи можете ви передбачити поведінку функції за аналітичним записом?

II. Повторення (10 хв)

1. Знайдіть область визначення функції $y = (2x + 6)^{-\frac{1}{3}}$.

Відповідь. $x \in (-3; +\infty)$.

2. Спростіть вираз $\left(\sqrt[5]{a^{-4}}\right)^{\frac{5}{16}} \cdot \left(a^{-\frac{7}{8}}\right)^{\frac{4}{21}}$.

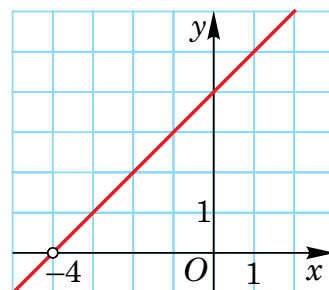
Відповідь. $a^{-\frac{5}{12}}$.

3. Побудуйте графік функції $y = \left((x + 4)^{-\frac{1}{7}}\right)^{-7}$.

Відповідь. Див. рисунок.

4. Знайдіть значення виразу $625^{-2,25} \cdot 25^{-\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{25}{9}}$.

Відповідь. 0,04.



5. Розв'яжіть рівняння $(x + 4)^{1,6} = 256$.

Відповідь. 28.

6. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-16}$. Порівняйте:

1) $f(5,6)$ і $f(2,4)$;

2) $f(-2,8)$ і $f(-7,3)$.

Відповідь. 1) $f(5,6) > f(2,4)$; 2) $f(-2,8) > f(-7,3)$.

7. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-3}$ на проміжку $[-3; -2]$.

Відповідь. $y_{\min} = -6$, $y_{\max} = -5$.

Як я вирішую цю проблему?

Задача. Розробник програмного забезпечення для обробки великого масиву аналітичних даних, створив алгоритм сортування та обробки даних. Алгоритм має час виконання T (у секундах), який залежить від розміру масиву n (кількості елементів) за законом: $T = 0,01 \cdot n^{1,5}$, $n > 0$. Планується обробка масивів від 10 до 100 тисяч елементів.

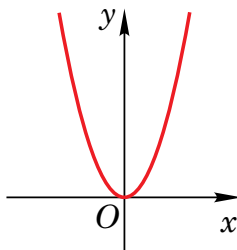
1) Обчисліть час виконання алгоритму для масивів розміром $n = 10000$; 50000 ; 100000 .

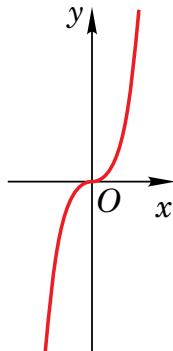
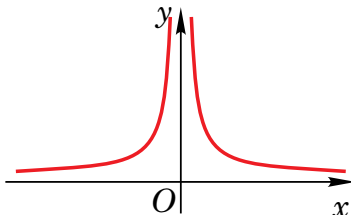
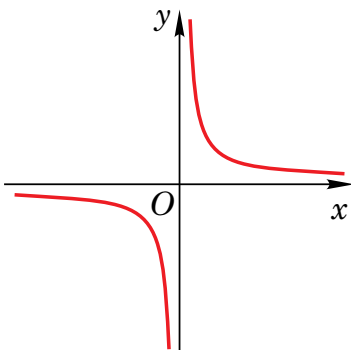
2) Побудуйте графік функції $T(n)$ для $n \in [0; 400]$, у тис. шт.

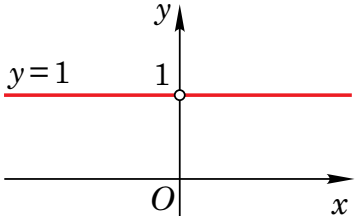
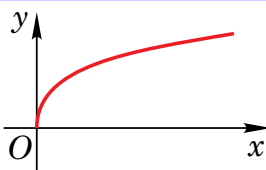
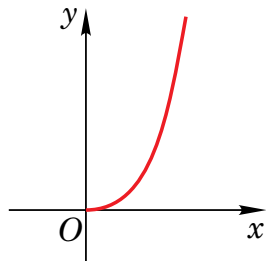
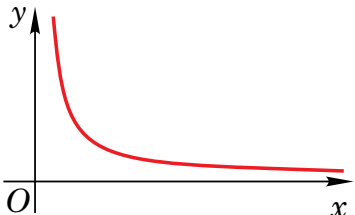
3) Визначте, як змінюється час виконання при подвоєнні розміру масиву даних.

III. Узагальнення властивостей функцій з різними показниками степеня

Повторюємо властивості степеневих функцій

1. Степенева функція	$y = x^n$, n — парне натуральне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Якщо $x \in (-\infty; 0]$, то функція спадає, якщо $x \in [0; +\infty)$, то функція зростає.

2. Степенева функція	$y = x^n$, n — непарне натуральне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (-\infty; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
3. Степенева функція	$y = x^k$, k — ціле від'ємне число, яке ділиться на 2 без остачі
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то функція зростає, якщо $x \in (0; +\infty)$, то функція спадає.
4. Степенева функція	$y = x^k$, k — ціле від'ємне число, яке не ділиться на 2 без остачі
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення.

5. Степенева функція	$y = x^k, k = 0$
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y = 1$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Монотонна на всій області визначення.
6. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове додатне число, яке менше від 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
7. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове додатне число, яке більше за 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
8. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове від'ємне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення.

Запропонуйте учням/ученицям дослідити властивості степеневих функцій за допомогою розробки GeoGebra.



<https://www.geogebra.org/calculator/nzuwabtz>

Ілюстративні приклади

8. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \frac{(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}{x^2 - 36}$.

Розв'язання. Оскільки $(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}$ степеневий вираз з дробовим показником більшим за 0, то $x^2 - 4 \geq 0$. Вираз $x^2 - 36$ знаходиться в знаменнику, тому потрібно розв'язати нерівність $x^2 - 36 \neq 0$.

Отже, розв'яжемо систему нерівностей:
$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ x^2 - 36 \neq 0. \end{cases}$$

Отже, $D(y) = (-\infty; -6) \cup (-6; -2] \cup [2; 6) \cup (6; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -6) \cup (-6; -2] \cup [2; 6) \cup (6; +\infty)$.

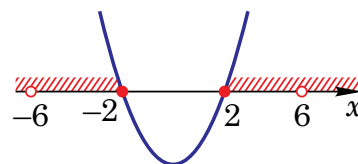
9. Знайдіть нулі функції $y = 3x^2(x^3 - 8)^{-\frac{2}{3}}$.

Розв'язання. Щоб знайти нулі функції потрібно розв'язати рівняння $y = 0$:

$$3x^2(x^3 - 8)^{-\frac{2}{3}} = 0, \quad \begin{cases} 3x^2 = 0, \\ (x^3 - 8)^{-\frac{2}{3}} = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння має корінь $x = 0$, друге рівняння коренів не має. Отже, функція має один нуль — $x = 0$.

Відповідь. 0.



IV. Побудова графіків функцій з різними показниками степеня

Ілюстративні приклади

10. Побудуйте графік функції $y = (2x - 1)^{2.6}$.

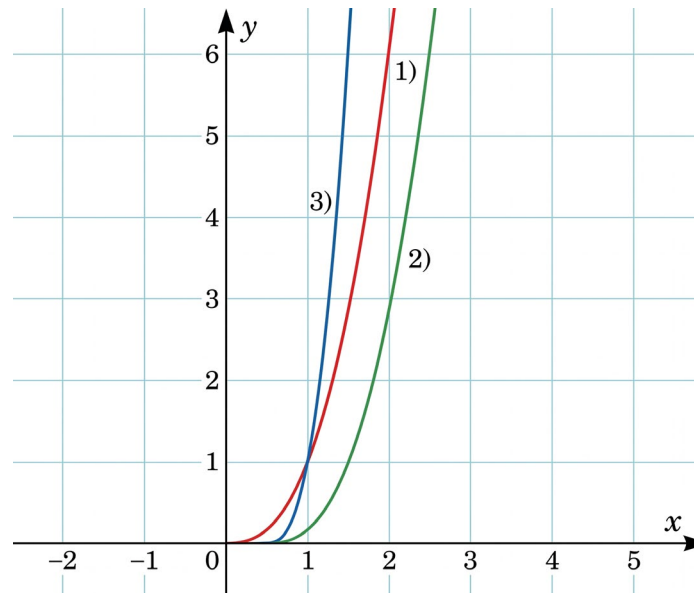
Розв'язання. **Схема побудови:**

1) $y = x^{2.6}$ — степенева функція з дробовим додатним показником, більшим за одиницю;

2) $y = (x - 0.5)^{2.6}$ — паралельне перенесення графіка на 0,5 одиниць ліворуч;

3) $y = (2(x - 0.5))^{2.6} = (2x - 1)^{2.6}$ — стиск графіка функції вдвічі до осі ординат.

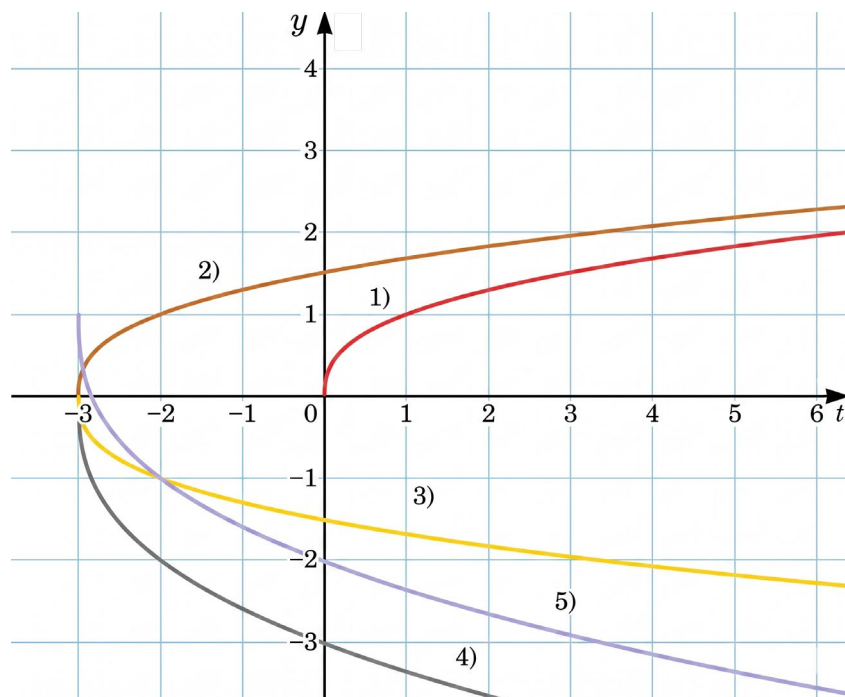
Графік побудовано на рисунку.



11. Побудуйте графік функції $y = 1 - 2(t + 3)^{\frac{3}{8}}$. Визначте множину значень.

Розв'язання. Схеми побудови:

- 1) $y = t^{\frac{3}{8}}$ — степенева функція з дробовим додатним показником, меншим від одиниці;
- 2) $y = (t + 3)^{\frac{3}{8}}$ — паралельне перенесення графіка функції вздовж осі t на 3 одиниці ліворуч;
- 3) $y = -(t + 3)^{\frac{3}{8}}$ — симетричне відображення графіка відносно осі t ;
- 4) $y = -2(t + 3)^{\frac{3}{8}}$ — стиск графіка функції вдвічі до осі ординат;
- 5) $y = -2(t + 3)^{\frac{3}{8}} + 1$ — паралельне перенесення графіка функції вздовж осі ординат на 1 одиницю вгору.



За графіком функції: $E(y) = (-\infty; 1]$.

Відповідь. $(-\infty; 1]$.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую цю проблему?

Задача. Розробник програмного забезпечення для обробки великого масиву аналітичних даних, створив алгоритм сортування та обробки даних. Алгоритм має час виконання T (у секундах), який залежить від розміру масиву n (кількості елементів) за законом: $T = 0,01 \cdot n^{1,5}$, $n > 0$. Планується обробка масивів від 10 до 100 тисяч елементів.

1) Обчисліть час виконання алгоритму для масивів розміром $n = 10000$; 50000 ; 100000 .

2) Побудуйте графік функції $T(n)$ для $n \in [0; 400]$, у тис. шт.

3) Визначте, як змінюється час виконання при подвоєнні розміру масиву даних.

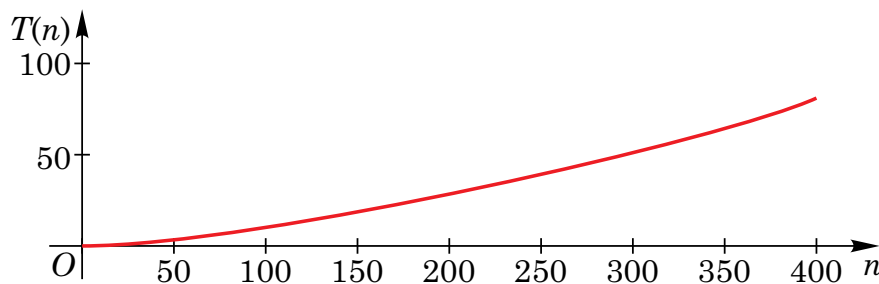
Розв'язання. 1) Обчислимо час виконання алгоритму $T(n) = 0,01 \cdot n^{1,5}$, де n — кількість елементів (у тис. шт):

для $n = 10$, $T(10) = 0,01 \cdot 10^{1,5} \approx 0,32$ (с).

для $n = 50$, $T(50) = 0,01 \cdot 50^{1,5} \approx 3,54$ (с).

для $n = 100$, $T(100) = 0,01 \cdot 100^{1,5} \approx 10$ (с).

2) Побудуємо графік функції на проміжку $[0; 400]$.



Графік степеневої функції $T(n) = 0,01 \cdot n^{1,5}$ спочатку повільно зростає, а потім стрімко піднімається при збільшенні n .

3) Якщо подвоїти масив даних до $2n$, то отримаємо:

$$T(2n) = 0,01(2n)^{1,5} = 0,01 \cdot 2^{1,5} \cdot n^{1,5} = 0,01 \cdot 2,828 \cdot n^{1,5} \approx 2,828 \cdot T(n)$$

Отже, при подвоєнні масиву даних час виконання алгоритму зростає майже у 2,83 рази.

Відповідь. $T(10) \approx 0,32$ с; $T(50) \approx 3,54$ с; $T(100) \approx 10$ с, зростає у 2,83 рази.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (12–15 хв)

Рівень А

1. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-18}$. Порівняйте:

1) $f(1,8)$ і $f(3,6)$; 2) $f(-2,5)$ і $f(-1,7)$; 3) $f(-5,4)$ і $f(5,4)$; 4) $f(0,9)$ і $f(-0,2)$.

2. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-5} + 1$ на проміжку $[2; 3]$.

3. Укажіть проміжки монотонності функції:

1) $y = x^5$; 2) $y = x^{-3}$; 3) $y = x^{\frac{2}{5}}$; 4) $y = x^{-0.3}$.

4. Побудуйте графіки функцій:

1) $y = -3x^{5.2}$; 2) $y = 4x^{-1.6}$; 3) $y = x^{\frac{2}{5}} - 2$; 4) $y = x^{-0.3} + 2$.

5. Побудуйте й порівняйте графіки функцій:

1) $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$ і $y = x^{\frac{1}{4}}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\frac{4}{5}} = 0,0016$; 2) $(x - 5)^{2.5} = 243$; 3) $x^{\frac{3}{5}} = 0,008$; 4) $(x + 6)^{\frac{1}{3}} = 625$.

7. Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = x^{\frac{2}{5}}$ на проміжку $[1; 32]$; 2) $y = x^{\frac{4}{3}}$ на проміжку $\left[\frac{1}{8}; 27\right]$.

Рівень В

1. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left((x - 1)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}$; 2) $y = \left((x - 4)^{-\frac{1}{5}}\right)^{-5}$.

2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x - 2)^{3.4}$; 2) $y = \left(\frac{x + 7}{x - 4}\right)^{2.1}$; 3) $y = x^{-1.2}$; 4) $y = (5 - 4x - x^2)^{\frac{1}{7}}$.

3. Оцініть значення x , якщо:

1) $0,001 < x^{-\frac{4}{3}} < 0,008$; 2) $32 \leq x^{\frac{2}{5}} \leq 243$;
3) $\frac{1}{64} \leq x^{-\frac{4}{3}} < \frac{27}{64}$; 4) $0 \leq x^{\frac{3}{4}} \leq \frac{1}{64}$.

4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-\frac{3}{2}}$ на проміжках:

1) $[1; 9]$; 2) $[0,25; 4]$; 3) $[0; 1]$; 4) $[25; +\infty)$.

5. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = (x - 1)^{-0.3}$; 2) $f(x) = (x + 2)^{\frac{2}{5}}$; 3) $f(x) = (2x - 6)^{-\sqrt{3}}$; 4) $f(x) = (x + 7)^{-\sqrt{2}}$.

6. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$; 2) $x^{-\frac{1}{3}} = x^2$; 3) $x^{\frac{5}{2}} = 2 - x$; 4) $x^{-\frac{1}{4}} = 2x - 1$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = -3(x + 1)^{\frac{1}{3}} + 2$; 2) $y = -4(x - 2)^{\frac{2}{3}} + 1$; 3) $y = 5(x + 5)^{\frac{1}{3}} + 4$; 4) $y = -2(x - 6)^{\frac{3}{5}} - 1$.

Рівень С

1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x^2 - 5x + 4)^{1.7}$; 2) $y = \left(\frac{5x - 1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}$; 3) $y = \left(\frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 2}\right)^{0.9}$; 4) $y = \left(\frac{9 - x^2}{x + 1}\right)^{-5}$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\frac{x+4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = (2x-5)^{\frac{4}{3}}$; 3) $y = \left(\frac{x-6}{4} + 1\right)^{\frac{7}{3}}$; 4) $y = \left(3 - \frac{x}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$.

3. Дано функції $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ і $g(x) = \frac{5x+7}{x-4}$. Знайдіть $f(g(5))$.

4. Для кожного значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

1) $x^{\frac{2}{3}} - 1 = x^2 + a$; 2) $a - (x-5)^4 = x^{\frac{3}{4}}$.

5. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності:

1) $x^4 \leq 2 + x^{\frac{2}{3}}$; 2) $10 - x^3 > x^{\frac{2}{5}}$.

6. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $|x-5|^2 = (x-5)^{\frac{1}{3}}$; 2) $(|x|-5)^2 = (|x|-5)^{\frac{1}{3}}$.

7. При яких значеннях параметра a функція $y = ((2a+3)x^2 - 2(a+3)x + 4a)^{\frac{1}{3}}$ має два нулі, один із яких більший за 3, а другий менший від 2?

VII. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Жахливі Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
.....
.....
- 2)
.....
.....
- ?
.....
.....

Список використаних джерел

1) Гавриш І. В., Доценко С. О., Горьков О. А., Скиба С. Б. Карти знань із математики: алгебра і початки аналізу, геометрія. 10 клас : навчальний посібник для класів закладів загальної середньої освіти, що працюють за науково-педагогічним проектом «Інтелект України». — Харків : Інтелект України, 2023. — 64 с.

- 2) Ярмак В. О., Резуненко В. О., Панченко І. І. Збірник завдань у тестовій формі. Алгебра та початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень. — Харків : Вид. група «Основа», 2018. — 96, [1] с. (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 7 (187)).
- 3) Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : профільний рівень : збірник задач і контрольних робіт. — Харків : Гімназія, 2018. — 144 с. : іл.
- 4) Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с.