

Урок 2. Урок-практикум. Графік степеневі функції з натуральним показником

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите означення степеневі функції з натуральним показником;
- 2) узагальните властивості степеневих функцій з натуральними показниками;
- 3) навчитесь будувати графіки степеневих функцій, за геометричними перетвореннями;
- 4) з'ясуєте, як змінюється графік степеневі функції при зміні коефіцієнтів та показника степеня;
- 5) навчитесь визначати властивості степеневих функцій за їхніми графіками.

II. Повторення

1. Функцію задано формулою $f(x) = -3x^2 + 2x$. Знайдіть: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$.
2. Функцію задано формулою $f(x) = -3x^2 + 2x$. Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції $f(x)$ дорівнює: 1) 0; 2) -1 ; 3) -56 .
3. Знайдіть область визначення функції:
 - 1) $f(x) = \frac{9}{x+4}$;
 - 2) $f(x) = \frac{x-6}{4}$;
 - 3) $f(x) = \sqrt{x-7}$;
 - 4) $f(x) = \frac{10}{\sqrt{-x-1}}$.
4. Знайдіть нулі функції:
 - 1) $f(x) = 0,4x - 8$;
 - 2) $f(x) = \frac{x^2 + x - 30}{x+5}$.
5. Знайдіть область значень функції:
 - 1) $f(x) = \sqrt{x} + 2$;
 - 2) $f(x) = 7 - x^2$.

III. Узагальнення властивостей степеневих функцій з натуральним показником

Розглянемо властивості функції $y = x^n$, $n \in N$ для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

1. Парне натуральне число: $n = 2k$, $k \in N$.

Зазначимо, що при $k = 1$ отримаємо функцію $y = x^2$, властивості та графік якої було розглянуто раніше.

1) *Множина значень функції.*

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває невід'ємних значень, то множина значень функції не містить жодного від'ємного числа. Тобто, для будь-якого $a \geq 0$ існує таке значення аргументу x , що $x^{2k} = a$.

2) *Область визначення функції.*

Областю визначення функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина дійсних чисел.

3) *Знакосталість функції.*

Функція набуває невід'ємних значень на всій своїй області визначення.

4) *Парність/непарність функції.*

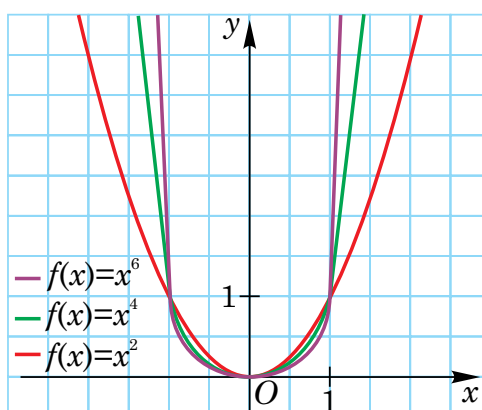
Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є парною. Для будь-якого x із області визначення функції виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

5) *Монотонність функції.*

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geq 0$. За властивістю числових нерівностей, отримаємо:

$(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$. Тому функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на інтервалі $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція зростає на інтервалі $[0; +\infty)$.

6) *Графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (див. рисунок).*



2. Непарне натуральне число: $n = 2k + 1$, $k \in N$.

Зазначимо, що при $k = 1$ отримаємо функцію $y = x^3$, властивості та графік якої було розглянуто раніше.

1) *Множина значень функції.*

Для будь-якого a існує значення аргументу x , при якому $x^{2k+1} = a$. Тому множиною значень функції є множина дійсних чисел.

2) *Область визначення функції.*

Областю визначення функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є множина дійсних чисел.

3) *Знакосталість функції.*

Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то функція набуває від'ємних значень.

Якщо $x \in (0; +\infty)$, то функція набуває додатних значень.

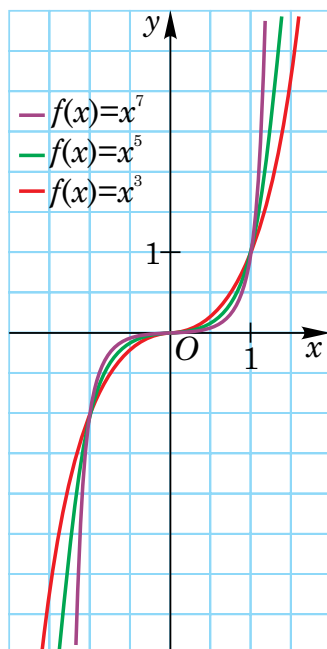
4) *Парність/непарність функції.*

Функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є непарною. Для будь-якого x із області визначення функції виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

5) *Монотонність функції.*

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. За властивістю числових нерівностей, отримаємо: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$. Тому функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, зростає на всій своїй області визначення.

6) Графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число (див. рисунок).



Дослідіть та перевірте властивості степеневих функцій з натуральним показником за допомогою динамічної моделі (див. покликання).

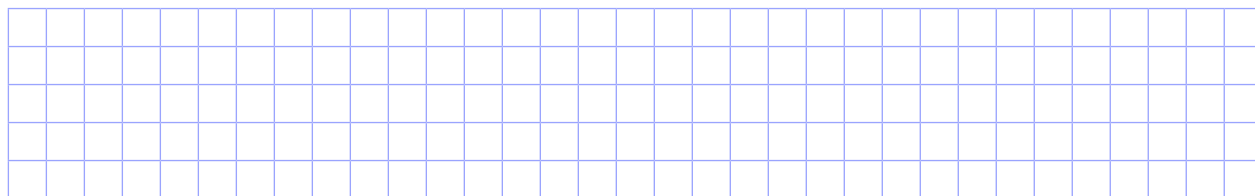
<https://www.geogebra.org/calculator/dj4xxrnh>



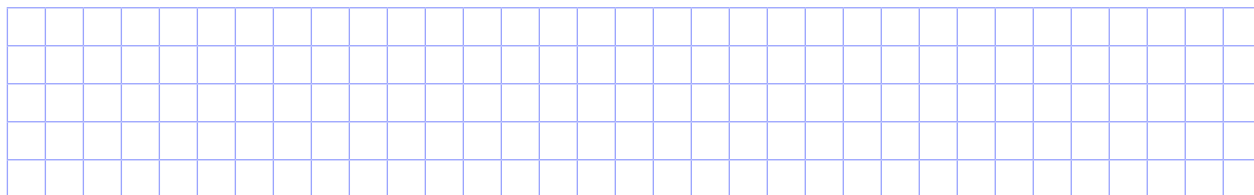
Приклад 1. Функцію задано формулою $f(x) = x^{24}$. Порівняйте:

1) $f(2023)$ і $f(2034)$;

2) $f(-2310)$ і $f(-3000)$.



Приклад 2. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = x^6$ на відрізку $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.



IV. Побудова графіків степеневих функції з натуральним показником за допомогою геометричних перетворень

Побудову графіків функцій можна виконувати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = x^n$.

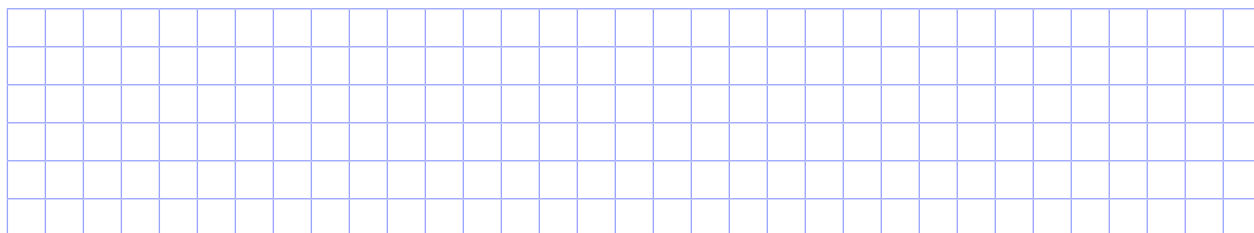
Перетворення	Формула
Паралельне перенесення графіка вздовж осі Oy на b одиниць.	$y = x^n + b$.
Паралельне перенесення графіка вздовж осі Ox на $-a$ одиниць.	$y = (x - a)^n$.
При $k > 1$ розтяг графіка від осі абсцис в k разів. При $0 < k < 1$ стиск графіка до осі абсцис в $\frac{1}{k}$ разів.	$y = kx^n, k > 0$.
При $k > 1$ стиск графіка до осі ординат в k разів. При $0 < k < 1$ розтяг графіка від осі ординат в $\frac{1}{k}$ разів.	$y = (kx)^n, k > 0$.
Симетрія відносно осі Oy .	$y = (-x)^n$.
Симетрія відносно осі Ox .	$y = -x^n$.
Частина графіка у верхній півплощині і на осі абсцис залишаємо без змін, а частину графіка в нижній півплощині, симетрично відображаємо відносно осі Ox .	$y = x^n $
Частина графіка для $x \geq 0$ симетрично відображаємо відносно осі Oy .	$y = x ^n$

Алгоритм побудови графіка степеневої функції за допомогою геометричних перетворень

1. Побудуйте графік функції $y = x^n$.
2. Визначте послідовність перетворень (переміщення по осях координат, відображення, розтягнення тощо).
3. В одній координатній площині побудуйте графік кожного перетворення функції $y = x^n$.
4. Позначте остаточний графік функції.

Приклад 3. Побудуйте графік функції $y = -(x - 1)^5 + 2$.





V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Абсолютно чорне тіло — це фізична абстракція, яка цілком поглинає все випромінювання, що падає на нього, і водночас випромінює теплову енергію. Загальна енергія теплового випромінювання з одиниці площі поверхні за одиницю часу визначається як $E = \sigma T^4$, де E — потужність на одиницю площі поверхні випромінювання, T — температура тіла (в Кельвінах), а $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) — константа Стефана —Больцмана.

- 1) Розгляньте функцію $E(t)$ та побудуйте схематичний графік функції.
- 2) Знайдіть значення загальної енергії теплового випромінювання для:
 - людського тіла ($T = 309^\circ$ К);
 - лампочки розжарювання ($T = 2500^\circ$ К);
 - Сонця ($T = 5800^\circ$ К).

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Побудуйте схематичний графік функції:
 - 1) $y = x^6$;
 - 2) $y = x^5$;
 - 3) $y = x^7$;
 - 4) $y = x^6$.Укажіть область визначення функції, множину значень функції. Визначте, чи вона є обмеженою зверху (знизу).
2. Визначте, чи функція $y = x^p$ є зростаючою/спадною при $x < 0$, якщо:
 - 1) $p = 7$;
 - 2) $p = 16$;
 - 3) $p = 3$;
 - 4) $p = 4$.
3. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку:
 - 1) $y = x^4$, $x \in [-1; 2]$;
 - 2) $y = x^7$, $x \in [-2; 3]$;
 - 3) $y = x^3$, $x \in [-3; -1]$;
 - 4) $y = x^2$, $x \in [1; 4]$.
4. За властивостями степеневої функції, порівняйте з одиницею:
 - 1) $4,1^{12}$;
 - 2) $0,2^3$;
 - 3) $0,7^9$;
 - 3) $(\sqrt{3})^{22}$.
5. Порівняйте значення виразів:
 - 1) $3,7^7$ і $4,3^7$;
 - 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3$ і $\left(\frac{12}{11}\right)^3$;
 - 3) $0,3^8$ і $0,2^8$;
 - 4) $2,5^2$ і $2,6^2$.
6. Схематично зобразіть графік функції 1) – 4). Знайдіть область визначення і множину значень функції, нулі функції.
 - 1) $y = (x - 2)^7$;
 - 2) $y = (x + 1)^6$;
 - 3) $y = (x + 2)^2$;
 - 4) $y = (x - 1)^3$.

- 7.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = -2x^3$; 2) $y = 3x^3$; 4) $y = -0,3x^4$; 4) $y = 0,25x^5$.
- 8.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = x^2 + 3$; 2) $y = x^3 - 2$; 4) $y = x^4 + 1$; 4) $y = x^5 - 4$.

Рівень В

- 1.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = -(x - 2)^3 - 1$; 2) $y = (x + 3)^4 + 2$.
 Укажіть область визначення та множину значень функції. Визначте, чи є функція зростаючою (спадною), чи набуває вона найбільшого (найменшого) значення.
- 2.** Знайдіть проміжки, на яких графік функції $y = x^8$ лежить вище (нижче) графіка функції $y = x$.
- 3.** Функцію задано формулою $g(x) = x^{12}$. Порівняйте:
 1) $g(5,8)$ і $g(4,9)$; 2) $g(-0,3)$ і $g(0,3)$;
 3) $g(-12,3)$ і $g(-15,1)$; 4) $g(1,4)$ і $g(-2,1)$.
- 4.** Функцію задано формулою $g(x) = x^{25}$. Порівняйте:
 1) $g(6,2)$ і $g(7,3)$; 2) $g(-7,5)$ і $g(7,5)$;
 3) $g(-0,13)$ і $g(-0,17)$; 4) $g(4,1)$ і $g(-1,2)$.
- 5.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = (x - 1)^3$; 3) $y = x^4 + 1$; 4) $y = -0,5x^3$.
- 6.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{10}$ на проміжку:
 1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $[2; +\infty)$.
- 7.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^7$ на проміжку:
 1) $[-1; 2]$; 2) $(-\infty; 0]$.
- 8.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = (x - 2)^2$; 2) $y = (x + 1)^3$; 3) $y = (x - 4)^4$; 4) $y = (x + 3)^5$.

Рівень С

- 1.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = |x|^3$; 2) $y = |x|^5$; 3) $y = |x|^3 + 1$;
 4) $y = |x|^5 - 2$; 5) $y = |x + 2|^3$; 6) $y = |2x|^3$.
- 2.** Парним чи непарним числом є показник степеня функції $y = x^n$, якщо:
 1) $f(-7) > f(-1)$; 2) $f(-7) < f(-1)$; 3) $f(-7) > f(1)$; 4) $f(-7) < f(1)$?
- 3.** Знайдіть область визначення функції:
 1) $y = (x + 7)^8$; 2) $y = (x - 13)^{13}$; 3) $y = (x - 5)^3$; 4) $y = (2x - 5)^7$.
- 4.** Укажіть множину значень функції:
 1) $y = x^{10} + 1$; 2) $y = (x + 5)^{12}$; 3) $y = (x + 1)^7$; 4) $y = x^2 - 4$.
 З'ясуйте парність/непарність функції.
- 5.** Чи існує натуральне значення p , при якому графік функції $y = x^p$ проходить через точку:
 1) $A(\sqrt{3}; 9)$; 2) $B(\sqrt{5}; 5)$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = -2(x - 1)^2 + 3$;

3) $y = -x^4 + 2$;

2) $y = 0,5(x + 2)^3 - 1$;

4) $y = 3(x - 3)^5 - 4$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2(x - 2)^2 - 1$;

3) $y = 0,2(x - 4)^4 + 1$;

2) $y = -3(x + 1)^3 + 2$;

4) $y = -0,5(x + 2)^5 - 3$.

8. Побудуйте графік функції:

1) $y = -4(x - 1)^2 - 5$;

3) $y = -2(x - 2)^4 + 1$;

2) $y = 0,25(x + 3)^3 + 2$;

4) $y = 5(x + 1)^5 - 3$.

Рефлексія

«Мій графік успіху»

На координатній площині побудуйте «графік навчання». На графіку покажіть, як змінювалося розуміння теми від початку до кінця уроку.

Вісь Ox — час або етапи навчання (початок → середина → завершення).

Вісь Oy — рівень розуміння або впевненості у знаннях.

Позначте на графіку точки:

◆ коли було складно;

♦ коли вдалося зрозуміти;

★ коли відчув/ла успіх.

Що допомогло «піднятися вгору» на цьому графіку?

Що нового дізналися про степеневі функції?

Над чим ще потрібно працювати?

Можливі теми проєктів

1. Використання степеневих функцій у фізиці.

2. Степеневі залежності в біології та в хімії.

3. Визначення швидкості поширення інфекцій за допомогою степеневих функцій.

4. Використання степеневих функцій у банківських розрахунках.

5. Розвиток степеневі функції в історії математики.







