



Тема 2. Степенева функція

Урок 2. **Урок-практикум. Графік степеневі функції з натуральним показником**

Тип уроку: формування умінь і навичок.

План уроку

1. Повторення.
2. Узагальнення властивостей степеневі функції з натуральним показником.
3. Побудова графіків степеневих функцій з натуральними показниками, за геометричними перетвореннями.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в специфічній проблемній ситуації, їхню достовірність [12 МАО 3.1.1–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям розв'язати завдання на повторення, які є найдоцільнішими.
- 2) На початку уроку поставте учням кілька мотиваційних запитань.
- 3) Подавайте новий матеріал стисло, у вигляді схем і таблиць. Пропонуйте учням/ученицям самостійно створювати алгоритми, схеми/таблиці для узагальнення вивченого.
- 4) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте їх, орієнтуючись на інтереси та рівень підготовки учнів/учениць.
- 5) Заохочуйте учнів/учениць до самостійного вивчення властивостей степеневі функції, побудови її графіків та формулювання висновків.
- 6) Обирайте обсяг матеріалу і глибину його опрацювання на власний розсуд.

7) Заплануйте розв'язування практичної задачі та тренувальних вправ. Вони сприяють формуванню навичок самостійної роботи над навчальним матеріалом.

8) Мотивуйте учнів/учениць до створення власних проєктів. Можливі теми проєктів запропоновано.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому важливо розуміти, як змінюється степенева функція?

2) Як знання властивостей степеневих функцій допомагає пояснити зростання, прискорення або зменшення певних показників у практичних задачах?

3) Як швидко визначити, який вигляд має графік степеневої функції, без його побудови?

4) Як зрозуміти поведінку графіка степеневої функції, якщо змінюється знак або коефіцієнт перед x^n ?

5) Як побудувати графік степеневої функції без таблиці її значень?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Функцію задано формулою $f(x) = -3x^2 + 2x$. Знайдіть: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$.

Відповідь. -1 ; 0 ; $\frac{1}{3}$; -16 .

2. Функцію задано формулою $f(x) = -3x^2 + 2x$. Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції $f(x)$ дорівнює: 1) 0 ; 2) -1 ; 3) -56 .

Відповідь. 1) 0 або $\frac{2}{3}$; 2) 1 або $-\frac{1}{3}$; 3) -4 або $\frac{14}{3}$.

3. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{9}{x+4}$;

2) $f(x) = \frac{x-6}{4}$;

3) $f(x) = \sqrt{x-7}$;

4) $f(x) = \frac{10}{\sqrt{-x-1}}$.

Відповідь. 1) $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; 2) $x \in R$; 3) $x \in [7; +\infty)$; 4) $x \in (-\infty; -1)$.

4. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x) = 0,4x - 8$;

2) $f(x) = \frac{x^2 + x - 30}{x + 5}$.

Відповідь. 1) 20 ; 2) -6 .

5. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 2$;

2) $f(x) = 7 - x^2$.

Відповідь. 1) $[2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 7]$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Абсолютно чорне тіло — це фізична абстракція, яка цілком поглинає все випромінювання, що падає на нього, і водночас випромінює теплову енергію. Загальна енергія теплового випромінювання з одиниці площі поверхні за одиницю часу визначається як $E = \sigma T^4$, де E — потужність на одиницю площі поверхні випромінювання, T — температура тіла (в Кельвінах), а $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) — константа Стефана —Больцмана.

- 1) Розгляньте функцію $E(t)$ та побудуйте схематичний графік функції.
- 2) Знайдіть значення загальної енергії теплового випромінювання для:
 - людського тіла ($T = 309^\circ$ К);
 - лампочки розжарювання ($T = 2500^\circ$ К);
 - Сонця ($T = 5800^\circ$ К).

III. Узагальнення властивостей степеневі функції з натуральним показником (5 хв)

Розглянемо властивості функції $y = x^n$, $n \in N$ для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

1. **Парне натуральне число:** $n = 2k$, $k \in N$.

Зазначимо, що при $k = 1$ отримаємо функцію $y = x^2$, властивості та графік якої було розглянуто раніше.

1) *Множина значень функції.*

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває невід'ємних значень, то множина значень функції не містить жодного від'ємного числа. Тобто, для будь-якого $a \geq 0$ існує таке значення аргументу x , що $x^{2k} = a$.

2) *Область визначення функції.*

Областю визначення функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина дійсних чисел.

3) *Знакосталість функції.*

Функція набуває невід'ємних значень на всій своїй області визначення.

4) *Парність/непарність функції.*

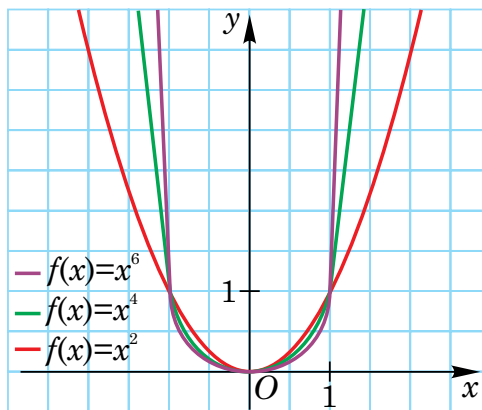
Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є парною. Для будь-якого x із області визначення функції виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

5) *Монотонність функції.*

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geq 0$. За властивістю числових нерівностей, отримаємо:

$(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$. Тому функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на інтервалі $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція зростає на інтервалі $[0; +\infty)$.

6) Графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (див. рисунок).



2. Непарне натуральне число: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Зазначимо, що при $k = 1$ отримаємо функцію $y = x^3$, властивості та графік якої було розглянуто раніше.

1) *Множина значень функції.*

Для будь-якого a існує значення аргументу x , при якому $x^{2k+1} = a$. Тому множиною значень функції є множина дійсних чисел.

2) *Область визначення функції.*

Областю визначення функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є множина дійсних чисел.

3) *Знакосталість функції.*

Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то функція набуває від'ємних значень.

Якщо $x \in (0; +\infty)$, то функція набуває додатних значень.

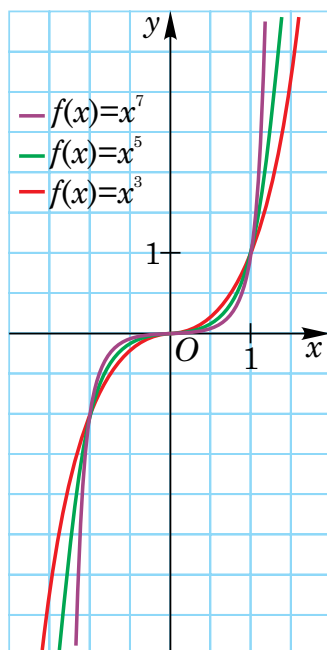
4) *Парність/непарність функції.*

Функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є непарною. Для будь-якого x із області визначення функції виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

5) *Монотонність функції.*

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. За властивістю числових нерівностей, отримаємо: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$. Тому функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, зростає на всій своїй області визначення.

6) Графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число (див. рисунок).



Дослідіть та перевірте властивості степеневих функцій з натуральним показником за допомогою динамічної моделі (див. покликання).

<https://www.geogebra.org/calculator/dj4xxrnh>



Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Функцію задано формулою $f(x) = x^{24}$. Порівняйте:

- 1) $f(2023)$ і $f(2034)$; 2) $f(-2310)$ і $f(-3000)$.

Розв'язання. Показник степеневих функцій є парним числом, тому функція $f(x) = x^{24}$ є парною і зростаючою при $x > 0$. Якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

Оскільки $2023 < 2034$, то $f(2023) < f(2034)$.

Якщо $x < 0$, то функція $f(x) = x^{24}$ є спадною. Тому при $x_1 < x_2$, маємо $f(x_1) > f(x_2)$.

Оскільки $-2310 > -3000$, то $f(-2310) < f(-3000)$.

Відповідь. 1) $f(2023) < f(2034)$; 2) $f(-2310) < f(-3000)$.

7. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = x^6$ на відрізку $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

Розв'язання. Функція $y = x^6$ спадає, якщо $x \in [-2; 0]$ і набуває найменшого значення, яке дорівнює нулю, при $x = 0$. Якщо $x \in [0; 0,5]$, то функція — зростає. Тому найбільше значення функції — це найбільше з чисел $y(-2)$ або $y(0,5)$.

Оскільки $y(-2) = (-2)^6 = 64$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$, то $y(-2) > y\left(\frac{1}{2}\right)$ і найбільше значення дорівнює 64.

Відповідь. 64; 0.

IV. Побудова графіків степеневих функції з натуральним показником за допомогою геометричних перетворень (3 хв)

Побудову графіків функцій можна виконувати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = x^n$.

Перетворення	Формула
Паралельне перенесення графіка вздовж осі Oy на b одиниць.	$y = x^n + b$.
Паралельне перенесення графіка вздовж осі Ox на $-a$ одиниць.	$y = (x - a)^n$.
При $k > 1$ розтяг графіка від осі абсцис в k разів. При $0 < k < 1$ стиск графіка до осі абсцис в $\frac{1}{k}$ разів.	$y = kx^n, k > 0$.
При $k > 1$ стиск графіка до осі ординат в k разів. При $0 < k < 1$ розтяг графіка від осі ординат в $\frac{1}{k}$ разів.	$y = (kx)^n, k > 0$.
Симетрія відносно осі Oy .	$y = (-x)^n$.
Симетрія відносно осі Ox .	$y = -x^n$.
Частину графіка у верхній півплощині і на осі абсцис залишаємо без змін, а частину графіка в нижній півплощині, симетрично відображаємо відносно осі Ox .	$y = x^n $
Частину графіка для $x \geq 0$ симетрично відображаємо відносно осі Oy .	$y = x ^n$

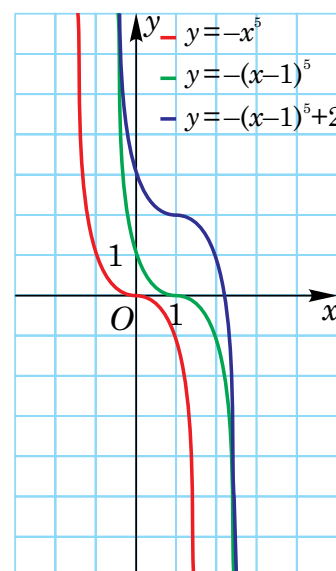
Алгоритм побудови графіка степеневі функції за допомогою геометричних перетворень

- 1.** Побудуйте графік функції $y = x^n$.
- 2.** Визначте послідовність перетворень (переміщення по осях координат, відображення, розтягнення тощо).
- 3.** В одній координатній площині побудуйте графік кожного перетворення функції $y = x^n$.
- 4.** Позначте остаточний графік функції.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

- 8.** Побудуйте графік функції $y = -(x - 1)^5 + 2$.

Розв'язання. Областю визначення функції є множина дійсних чисел. Побудуємо графік функції $y = -x^5$, виконаємо паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис на 1 одиницю праворуч і паралельне перенесення вздовж осі ординат на 2 одиниці вгору (див. рисунок).

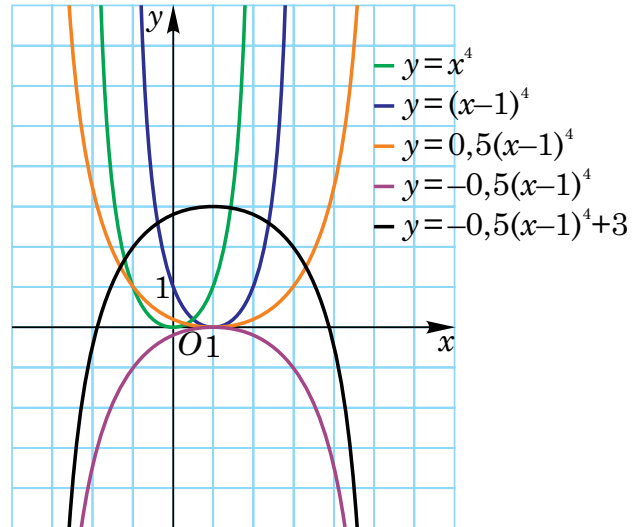


9. Побудуйте графік функції $y = -0,5(x - 1)^4 + 3$.

Розв'язання. Послідовність побудови:

- 1) $y = x^4$;
- 2) $y = (x - 1)^4$, паралельне перенесення на 1 одиницю праворуч по осі Ox ;
- 3) $y = 0,5(x - 1)^4$, стиск графіка до осі абсцис у 2 рази;
- 4) $y = -0,5(x - 1)^4$, симетрія графіка відносно осі Ox ;
- 5) $y = -0,5(x - 1)^4 + 3$, паралельне перенесення графіка на 3 одиниці вгору по осі Oy .

Графік побудовано на рисунку.



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Абсолютно чорне тіло — це фізична абстракція, яка цілком поглинає все випромінювання, що падає на нього, і водночас випромінює теплову енергію. Загальна енергія теплового випромінювання з одиниці площі поверхні за одиницю часу визначається як $E = \sigma T^4$, де E — потужність на одиницю площі поверхні випромінювання, T — температура тіла (в Кельвінах), а $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ — константа Стефана — Больцмана.

- 1) Розгляньте функцію $E(t)$ та побудуйте схематичний графік функції.
- 2) Знайдіть значення загальної енергії теплового випромінювання для:
 - людського тіла ($T = 309^\circ \text{ K}$);
 - лампочки розжарювання ($T = 2500^\circ \text{ K}$);
 - Сонця ($T = 5800^\circ \text{ K}$).

Розв'язання. 1) Функція $f(T) = \sigma T^4$ — степенева функція з парним натуральним показником. При $T \geq 0$ функція набуває невід'ємних значень і монотонно зростає (див. графік).

2) Для людського тіла загальна енергія теплового випромінювання, при $T = 309^\circ \text{ K}$, становить:

$$F = \sigma T^4 = 5,6704 \cdot 10^{-8} \cdot 309^4 \approx 516,95 \text{ (Вт/м}^2\text{)}.$$

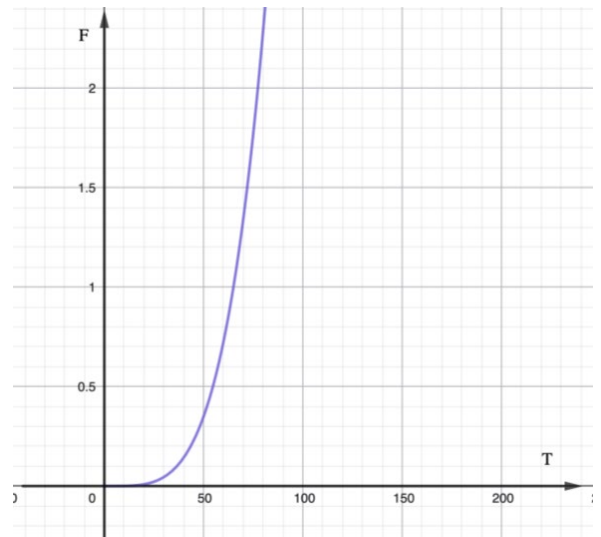
Для лампочки розжарювання, при $T = 2500^\circ \text{ K}$:

$$E = \sigma T^4 = 5,6704 \cdot 10^{-8} \cdot 2500^4 = 2\,215\,000 \text{ Вт/м}^2 = 2,215 \cdot 10^6 \text{ (Вт/м}^2\text{)}$$

Для Сонця, при $T = 5800^\circ \text{ K}$:

$$E = \sigma T^4 = 5,6704 \cdot 10^{-8} \cdot 5800^4 \approx 64\,169\,058,91 \text{ (Вт/м}^2\text{)} \approx 64,17 \cdot 10^6 \text{ (Вт/м}^2\text{)}.$$

Відповідь. 516,95 Вт/м²; 2,215 · 10⁶ Вт/м²; 64,17 · 10⁶ Вт/м².



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (10–12 хв)

Рівень А

- Побудуйте схематичний графік функції:
1) $y = x^6$; 2) $y = x^5$; 3) $y = x^7$; 4) $y = x^6$.
Укажіть область визначення функції, множину значень функції. Визначте, чи вона є обмеженою зверху (знизу).
- Визначте, чи функція $y = x^p$ є зростаючою/спадною при $x < 0$, якщо:
1) $p = 7$; 2) $p = 16$; 3) $p = 3$; 4) $p = 4$.
- Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку:
1) $y = x^4, x \in [-1; 2]$; 2) $y = x^7, x \in [-2; 3]$;
3) $y = x^3, x \in [-3; -1]$; 4) $y = x^2, x \in [1; 4]$.
- За властивостями степеневої функції, порівняйте з одиницею:
1) $4,1^{12}$; 2) $0,2^3$; 3) $0,7^9$; 4) $(\sqrt{3})^{22}$.
- Порівняйте значення виразів:
1) $3,7^7$ і $4,3^7$; 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3$ і $\left(\frac{12}{11}\right)^3$; 3) $0,3^8$ і $0,2^8$ 4) $2,5^2$ і $2,6^2$.
- Схематично зобразіть графік функції 1) – 4). Знайдіть область визначення і множину значень функції, нулі функції.
1) $y = (x - 2)^7$; 2) $y = (x + 1)^6$; 3) $y = (x + 2)^2$; 4) $y = (x - 1)^3$.
- Побудуйте графік функції:
1) $y = -2x^3$; 2) $y = 3x^3$; 4) $y = -0,3x^4$; 4) $y = 0,25x^5$.
- Побудуйте графік функції:
1) $y = x^2 + 3$; 2) $y = x^3 - 2$; 4) $y = x^4 + 1$; 4) $y = x^5 - 4$.

Рівень В

- Побудуйте графік функції:
1) $y = -(x - 2)^3 - 1$; 2) $y = (x + 3)^4 + 2$.
Укажіть область визначення та множину значень функції. Визначте, чи є функція зростаючою (спадною), чи набуває вона найбільшого (найменшого) значення.
- Знайдіть проміжки, на яких графік функції $y = x^8$ лежить вище (нижче) графіка функції $y = x$.
- Функцію задано формулою $g(x) = x^{12}$. Порівняйте:
1) $g(5,8)$ і $g(4,9)$; 2) $g(-0,3)$ і $g(0,3)$;
3) $g(-12,3)$ і $g(-15,1)$; 4) $g(1,4)$ і $g(-2,1)$.
- Функцію задано формулою $g(x) = x^{25}$. Порівняйте:
1) $g(6,2)$ і $g(7,3)$; 2) $g(-7,5)$ і $g(7,5)$;
3) $g(-0,13)$ і $g(-0,17)$; 4) $g(4,1)$ і $g(-1,2)$.
- Побудуйте графік функції:
1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = (x - 1)^3$; 3) $y = x^4 + 1$; 4) $y = -0,5x^3$.

6. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{10}$ на проміжку:
 1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $[2; +\infty)$.
7. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^7$ на проміжку:
 1) $[-1; 2]$; 2) $(-\infty; 0]$.
8. Побудуйте графік функції:
 1) $y = (x - 2)^2$; 2) $y = (x + 1)^3$; 3) $y = (x - 4)^4$; 4) $y = (x + 3)^5$.

Рівень С

1. Побудуйте графік функції:
 1) $y = |x|^3$; 2) $y = |x|^5$; 3) $y = |x|^3 + 1$;
 4) $y = |x|^5 - 2$; 5) $y = |x + 2|^3$; 6) $y = |2x|^3$.
2. Парним чи непарним числом є показник степеня функції $y = x^n$, якщо:
 1) $f(-7) > f(-1)$; 2) $f(-7) < f(-1)$; 3) $f(-7) > f(1)$; 4) $f(-7) < f(1)$?
3. Знайдіть область визначення функції:
 1) $y = (x + 7)^8$; 2) $y = (x - 13)^{13}$; 3) $y = (x - 5)^3$; 4) $y = (2x - 5)^7$.
4. Укажіть множину значень функції:
 1) $y = x^{10} + 1$; 2) $y = (x + 5)^{12}$; 3) $y = (x + 1)^7$; 4) $y = x^2 - 4$.
 З'ясуйте парність/непарність функції.
5. Чи існує натуральне значення p , при якому графік функції $y = x^p$ проходить через точку:
 1) $A(\sqrt{3}; 9)$; 2) $B(\sqrt{5}; 5)$.
6. Побудуйте графік функції:
 1) $y = -2(x - 1)^2 + 3$; 2) $y = 0,5(x + 2)^3 - 1$;
 3) $y = -x^4 + 2$; 4) $y = 3(x - 3)^5 - 4$.
7. Побудуйте графік функції:
 1) $y = 2(x - 2)^2 - 1$; 2) $y = -3(x + 1)^3 + 2$;
 3) $y = 0,2(x - 4)^4 + 1$; 4) $y = -0,5(x + 2)^5 - 3$.
8. Побудуйте графік функції:
 1) $y = -4(x - 1)^2 - 5$; 2) $y = 0,25(x + 3)^3 + 2$;
 3) $y = -2(x - 2)^4 + 1$; 4) $y = 5(x + 1)^5 - 3$.

VII. Рефлексія (2–3 хв)

«Мій графік успіху»

На координатній площині побудуйте «графік навчання». На графіку покажіть, як змінювалося розуміння теми від початку до кінця уроку.

Вісь Ox — час або етапи навчання (початок → середина → завершення).

Вісь Oy — рівень розуміння або впевненості у знаннях.

Позначте на графіку точки:

- ◆ коли було складно;
- ♦ коли вдалося зрозуміти;
- ★ коли відчув/ла успіх.

Що допомогло «піднятися вгору» на цьому графіку?

.....

.....

Що нового дізналися про степеневі функції?

.....

.....

Над чим ще потрібно працювати?

.....

.....

Можливі теми проєктів

1. Використання степеневих функцій у фізиці.
2. Степеневі залежності в біології та в хімії.
3. Визначення швидкості поширення інфекцій за допомогою степеневих функцій.
4. Використання степеневих функцій у банківських розрахунках.
5. Розвиток степеневі функції в історії математики.

Список використаних джерел

- 1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : профільний рівень : підручн. для 10 класу закладів загальної середньої освіти.— Харків : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас : збірник задач і контрольних робіт. — Харків : Гімназія, 2011. — 144 с. : іл.
- 3) Корнієнко Т. Л., Фіготіна В. І. Математика. 11 клас. Рівень стандарту : розробки уроків. — Харків : Видавництво «Ранок», 2012. — 368 с. — (Новий майстер-клас). — + Дод. (16 с.).