

Урок 3. Побудова графіків степеневі функції з натуральними показниками

Тип уроку: формування умінь і навичок.

План уроку

1. Повторення.
2. Побудова графіків степеневі функції з натуральними показниками.
3. Графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь, що містять степеневі функції з натуральними показниками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям розв'язати кілька завдань на повторення.
- 2) Сформулюйте мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 3) Сформулюйте практичну задачу без розв'язання. Розв'язання задачі учні/учениці виконуватимуть у групах наприкінці уроку.
- 4) Повторіть теоретичний матеріал у вигляді схем, таблиць і графіків.
- 5) До теоретичних тверджень наведено кілька ілюстративних прикладів, які обирайте на власний розсуд.
- 6) Заохочуйте учнів/учениць до самостійного дослідження властивостей степеневих функцій і побудови їхніх графіків.
- 7) Заплануйте розв'язання практичної задачі та тренувальних вправ, які сприятимуть формуванню навичок побудови графіків і розв'язуванню рівнянь та систем рівнянь графічним методом.

- 8) Мотивуйте учнів/учениць до створення навчальних проєктів.
- 9) Оберіть обсяг матеріалу на власний розсуд.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Як можна за допомогою графіка функції знайти розв'язки рівняння?
- 2) У яких практичних задачах зустрічаються функціональні залежності, які описуються степеневими функціями?
- 3) Чому для одних степеневих функцій графік симетричний відносно осі Oy або точки $(0; 0)$, а для інших — ні?
- 4) Як можна, за графіками функцій, порівнювати розв'язки двох різних рівнянь?
- 5) Чи має переваги графічний метод розв'язування рівнянь, систем рівнянь та нерівностей у порівнянні з алгебричним методом?

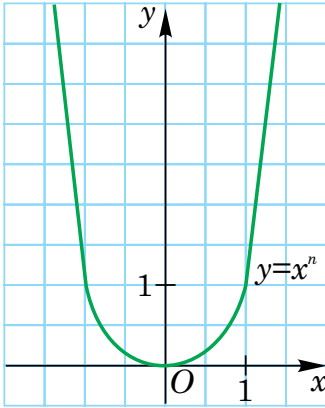
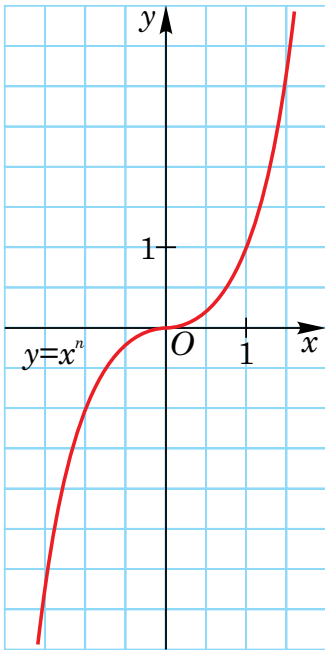
II. Повторення (5–7 хв)

1. Порівняйте числа:
1) $2,7^6$ і $2,4^6$; 2) $(-7)^8$ і $(-8)^8$; 3) $4,5^9$ і $4,8^9$; 4) $(-6)^9$ і $(-4)^9$.
Відповідь. 1) $2,7^6 > 2,4^6$; 2) $(-7)^8 < (-8)^8$; 3) $4,5^9 < 4,8^9$; 4) $(-6)^9 < (-4)^9$.
2. Знайдіть значення виразу $\sqrt{(1-x)^2} - \sqrt{(x-3)^2}$, якщо $x = \sqrt{10}$.
Відповідь. 2.
3. Розв'яжіть графічно рівняння $x^3 = 3 - 2x$.
Відповідь. 1.
4. Укажіть нуль функції $y = x^5 - 1$.
Відповідь. 1.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Молода підприємниця створила невелику компанію, яка виготовляє еко-свічки ручної роботи. Вона помітила, що прибуток компанії зростає разом із кількістю проданих свічок, але не лінійно. Було встановлено, що залежність прибутку P (у тис. грн) від кількості проданих свічок x , описується степеневою функцією $P = 0,5x^2$. Підприємниця запланувала отримати прибуток 45000 грн за місяць і хоче дізнатись, скільки свічок потрібно продати, щоб реалізувати свій план. Скільки одиниць товару треба продати, щоб отримати запланований прибуток?

III. Властивості та графік степеневої функції з натуральним показником (5 хв)

Функція $y = x^n$	n — парне	n — непарне
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$.	$(-\infty; +\infty)$.
Множина значення	$[0; +\infty)$.	$(-\infty; +\infty)$.
Зростання, спадання	Функція зростає, якщо $x \in [0; +\infty)$. Функція спадає, якщо $x \in (-\infty; 0]$.	Функція є зростаючою на всій області визначення.
Парність, непарність	Парна.	Непарна.
Точки, через які проходить графік функції	$(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; 1)$.	$(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$.
Розташування графіка функції	У I і II координатних четвертях.	У I і III координатних четвертях.
Графік функції		

IV. Графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь (4 хв)

Схема розв'язування рівняння графічним методом

1. Будуємо графік лівої частини рівняння.
2. Будуємо графік правої частини рівняння.
3. Визначаємо координати точок перетину графіків, абсциси яких є розв'язками рівняння.

Схема розв'язування систем рівнянь графічним методом

1. Будуємо графік першого рівняння системи.
2. Будуємо графік другого рівняння системи.
3. Визначаємо координати точок перетину графіків, які є розв'язками системи.

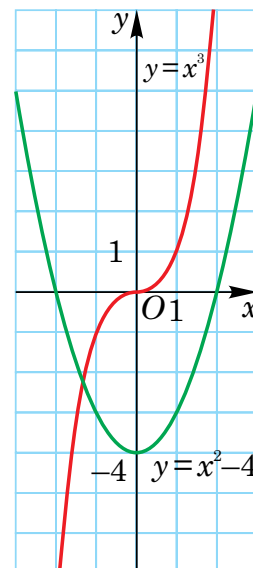
Ілюстративні приклади (5–8 хв)

5. Установіть графічно кількість коренів рівняння $x^3 = x^2 - 4$.

Розв'язання. Побудуємо графіки функцій $f(x) = x^3$ та $g(x) = x^2 - 4$ в одній координатній площині (див. рисунок).

Оскільки графіки функцій мають одну спільну точку, то рівняння має один розв'язок.

Відповідь. Один.



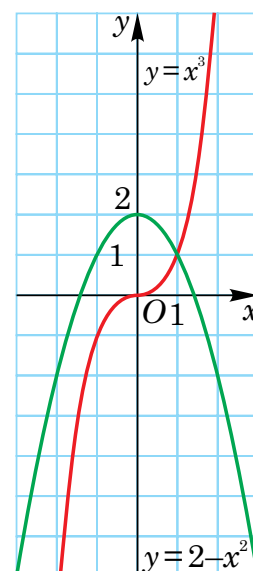
6. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Графіки першого та другого рівнянь системи побудуємо в одній координатній площині (див. рисунок).

Оскільки графіки функцій мають одну спільну точку, то система рівнянь має один розв'язок.

Відповідь. Один.



7. Установіть кількість коренів рівняння $2x^4 = a - 2$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. Графіки функцій $f(x) = 2x^4$ і $g(x) = a - 2$ побудуємо в одній координатній площині (див. рисунок).

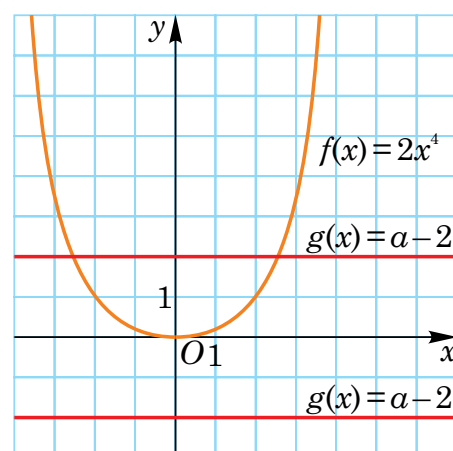
Розв'язки рівняння — абсциси точок перетину графіків.

1) Якщо $a < 2$, то $a - 2 < 0$. Пряма $y = a - 2$ лежить нижче осі Ox і не перетинає графік $y = 2x^4$, оскільки $2x^4 \geq 0$ для всіх дійсних x .

2) Якщо $a = 2$, то $a - 2 = 0$. Пряма $y = a - 2$ збігається з віссю Ox . Тоді графіки $y = 2x^4$ і $y = a - 2$ мають одну спільну точку $x = 0$.

3) Якщо $a > 2$, то $a - 2 > 0$. Тоді пряма $y = a - 2$ перетинає параболу $y = 2x^4$ у двох точках.

Відповідь. Якщо $a < 2$, то рівняння не має дійсних розв'язків. Якщо $a = 2$, то рівняння має один розв'язок. Якщо $a > 2$, то рівняння має два розв'язки.



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Молода підприємниця створила невелику компанію, яка виготовляє еко-свічки ручної роботи. Вона помітила, що прибуток компанії зростає разом із кількістю проданих свічок, але не лінійно. Було встановлено, що залежність прибутку P (у тис. грн) від кількості проданих свічок x , описується степеневою функцією $P = 0,5x^2$. Підприємниця запланувала отримати прибуток 45000 грн за місяць і хоче дізнатись, скільки свічок потрібно продати, щоб реалізувати свій план. Скільки одиниць товару треба продати, щоб отримати запланований прибуток?

Розв'язання. Якщо побудувати графіки функцій $f(x) = 0,5x^2$ і $g(x) = 45000$ в одній координатній площині, то матимемо дві точки їхнього перетину. Тоді рівняння має два корені. Умові задачі задовольняє додатний корінь рівняння:

$$0,5x^2 = 45000, x^2 = 90000, x = \sqrt{90000} = 300.$$

Отже, щоб отримати прибуток 45000 грн, потрібно продати 300 еко-свічок.

Відповідь. 300 еко-свічок.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (10–12 хв)

Рівень А

- Розв'яжіть графічним методом рівняння:
1) $x^2 = 4$; 2) $x^3 = -2$; 3) $x^2 = -3$; 4) $x^4 = 1$.
- Установіть графічно кількість коренів рівняння:
1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0,5x - 2$.
- Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$
- Скільки коренів має рівняння $x^{12} = a - 6$ залежно від значень параметра a ?
- Скільки коренів має рівняння $x^n = 1600$, якщо:
1) n — парне натуральне число;
2) n — непарне натуральне число?
- Серед рівнянь 1) – 6) укажіть рівняння, які не мають розв'язків. Обґрунтуйте відповідь графічним методом. Якщо рівняння 1) – 6) має дійсні корені, то знайдіть їх.
1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $x^3 - 27 = 0$; 3) $x^4 + 1 = 0$;
4) $x^5 = x$; 5) $x^6 = 16$; 6) $x^2 = -9$.
- Побудуйте графік функції:
1) $y = |x|x^3$; 2) $y = |x|x^4 - x^5$.
- Установіть графічно кількість коренів рівняння:
1) $x^2 = 4$; 2) $x^3 = x$; 3) $x^4 = \sqrt{x}$; 4) $x^2 = \frac{1}{x}$;
5) $x^4 = |x - 3|$; 6) $x^3 = 3 - 2x$; 7) $\frac{1}{x-4} = x^3$; 8) $x^3 = 4 - x^2$.
Якщо можливо, запишіть значення коренів.

Рівень В

1. Побудуйте графік функції:
1) $y = |x| x^4$; 2) $y = |x| x^4 + x^5$.
2. Розв'яжіть рівняння:
1) $4x^3 + x^7 = -5$; 2) $x^6 + 3x^8 = 4$; 3) $5x^{17} - 3x^8 = 2$; 4) $11x^{15} + 2x^4 = -9$.
3. Скільки коренів має рівняння $x^{24} = a^2 + 7a - 8$ залежно від значень параметра a ?
4. Установіть графічно кількість коренів рівняння:
1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0,5x - 2$; 4) $x^3 = x^2 - 3$.
5. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:
1) $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^5, \\ y = 2 - 0,5x^2. \end{cases}$
6. Скільки коренів має рівняння $x^8 = 9a - a^3$ залежно від значень параметра a ?

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^{11} + x^3 = 2$; 2) $2x^4 + x^{10} = 3$.
2. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:
1) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = 2x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x + 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = x + 1; \end{cases}$
4) $\begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ y = x^3 + 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y = x^5 - 1, \\ y = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y = x^2 + 2, \\ y = 3x + 4. \end{cases}$
3. Побудуйте графік функції:
1) $y = x^3 - 1$; 2) $y = -0,5x^4$; 3) $y = (x + 1)^4 - 1$; 4) $y = |x^3|$.
4. Розв'яжіть графічно нерівність $x^5 > x^4$.
5. Знайдіть усі значення параметра a , для яких рівняння $x^{16} = 3 - 2a - a^2$ має хоча б один корінь.
6. Доведіть нерівність:
1) $\sin^4 x \leq \sin^2 x$; 2) $\cos^6 x \leq \cos^2 x$.
7. Побудуйте графік функції:
1) $f(x) = \begin{cases} -x^4 - 1, & x < 0, \\ -\sqrt{x} - 1, & x \geq 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^5, & x < 1, \\ 3 - 2x, & x \geq 1. \end{cases}$
8. Розв'яжіть рівняння:
1) $7x^{19} + 5x^{11} = -12$; 2) $5x^{10} + 3x^6 = 8$.

VII. Рефлексія (2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
-
-

- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
-
-
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

- 1.** Порівняння графіків парних і непарних степеневих функцій.
- 2.** Розв'язування практичних задач графічним методом із використанням степеневих функцій.
- 3.** Створення інтерактивної моделі степеневих функцій у GeoGebra.
- 4.** Графічне розв'язування систем рівнянь, що містять степеневі функції.
- 5.** Використання степеневих функцій у дизайні, в архітектурі та в мистецтві.

Список використаних джерел

- 1) Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу. 10 кл.: профільний рівень: збірник задач і контрольних робіт. — Харків: Гімназія, 2018. — 144 с.: іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень: підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Харків: Гімназія, 2018. — 400 с.: іл.
- 3) Кравчук В. Р. Алгебра та початки аналізу: підручн. для 10 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. — Тернопіль: Підручники та посібники, 2006. — 320 с.