

Урок 5. Урок —практикум. Графіки степеневих функцій з цілими показниками

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) з'ясуєте особливості графіків функцій із цілими показниками;
- 2) навчитесь будувати графіки степеневих функцій з додатними та від'ємними показниками;
- 3) дослідите, як змінюються графіки функції $y = ax^n$ при зміні коефіцієнта a ;
- 4) розглянете властивості степеневих функцій із цілими показниками;
- 5) порівняєте графіки степеневих функцій із різними показниками;
- 6) застосуєте побудову та аналіз графіків степеневих функцій для розв'язування практичних і навчальних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$;

2) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}$;

3) $9 \cdot 0,1^{-1}$;

4) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

2. Подайте у вигляді дроби вираз:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;

2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;

3) $(c^{-1} - d^{-1})(c - d)^{-2}$.

3. Якщо $x < 0$, то, які з функцій 1) – 4) зростають?

1) $y = x^2$;

2) $y = x^3$;

3) $y = x^{-1}$;

4) $y = x^{-4}$.

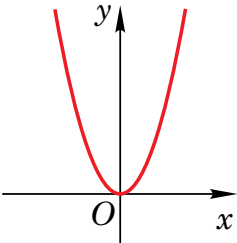
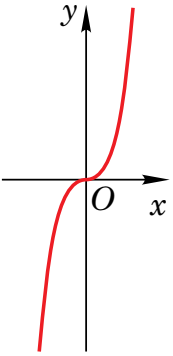
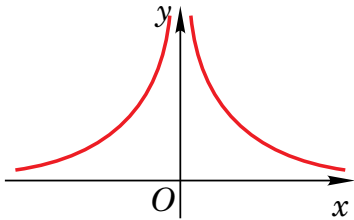
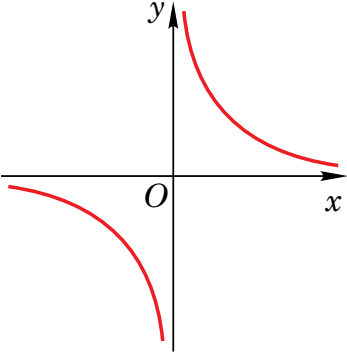
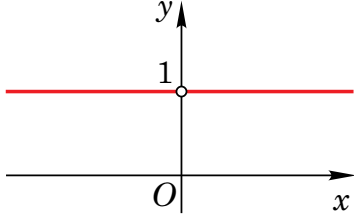
4. Порівняйте:

1) 2^{-3} і $(\sqrt{3})^{-3}$;

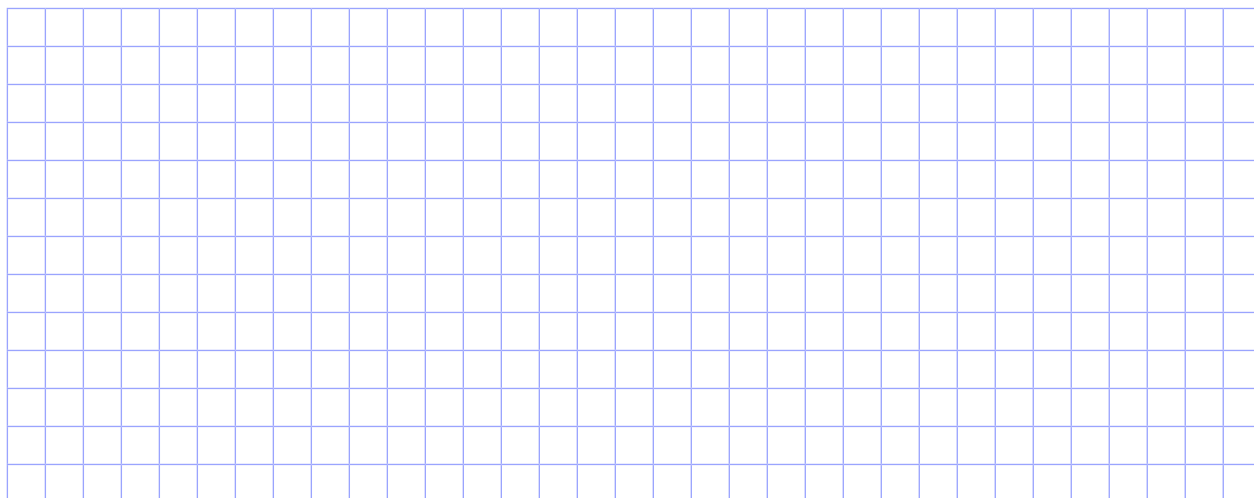
2) $(-2)^{-2}$ і $(-4)^{-2}$.

III. Властивості степеневих функцій з натуральними та цілими показниками

Узагальнення властивостей степеневих функцій із натуральними та цілими показниками наведено в таблиці.

Властивість	$y = x^n$, n — парне	$y = x^n$, n — непарне	$y = x^k$, k — ціле від'ємне число, яке ділиться на 2 без остачі
Схематичний графік			
Область визначення	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$	$y \in (-\infty; +\infty)$	$y \in (0; +\infty)$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$	Немає
Проміжки монотонності	Якщо $x \in (-\infty; 0]$, то функція спадає, якщо $x \in [0; +\infty)$, то функція зростає	Зростає на всій області визначення	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то функція зростає, якщо $x \in (0; +\infty)$, то функція спадає
Властивість	$y = x^k$, k — ціле від'ємне число, яке не ділиться на 2 без остачі	$y = x^k$, $k = 0$	
Схематичний графік			
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	
Множина значень	$y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$y = 1$	
Нулі функції	Немає	Немає	
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення	Монотонна на всій області визначення	

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 - 1$. Укажіть парність/непарність функції.



IV. Графіки степеневі функції з цілими показниками

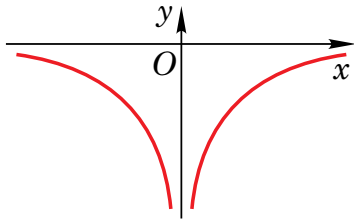
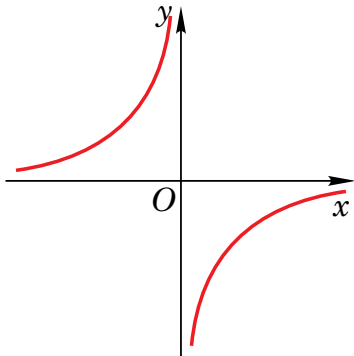
Алгоритм побудови графіка степеневі функції $y = x^p$

1. За показником степеня p визначте вид функції.
2. Знайдіть область її визначення. Розв'яжіть відповідну нерівність.
3. Визначте, чи є функція парною, непарною або ні парною, ні непарною.
4. Знайдіть опорні точки. Обчисліть значення функції для кількох значень x , наприклад, при $x = -1; 0; 2$.
5. Позначте знайдені точки на координатній площині та з'єднайте їх плавною кривою, враховуючи симетрію графіка функції.

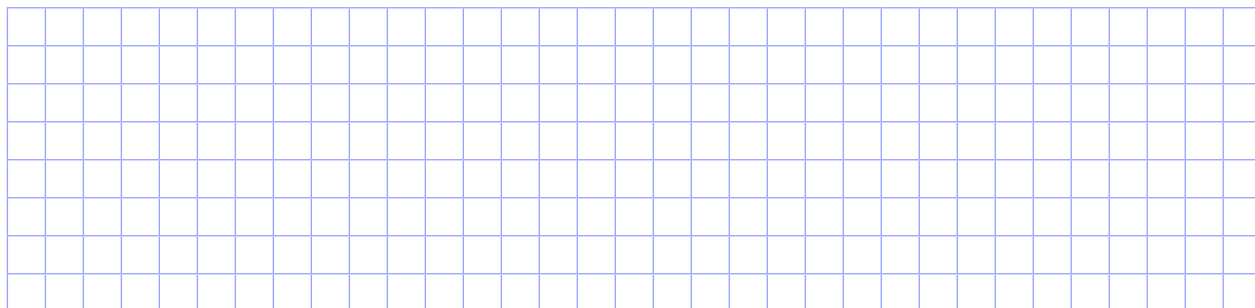
Опис графіка функції $y = ax^k$

1. Якщо $0 < a < 1$, то графік стискається до осі абсцис.
Наприклад, якщо $a = 0,5$, то кожне значення функції зменшується вдвічі.
2. Якщо $a > 1$, то графік стискається до осі ординат.
Наприклад, якщо $a = 2$, то кожне значення функції подвоюється.
3. Якщо $a < 0$, то відбувається відображення графіка відносно осі x .
Усі додатні значення стають від'ємними, і навпаки (див. таблицю).

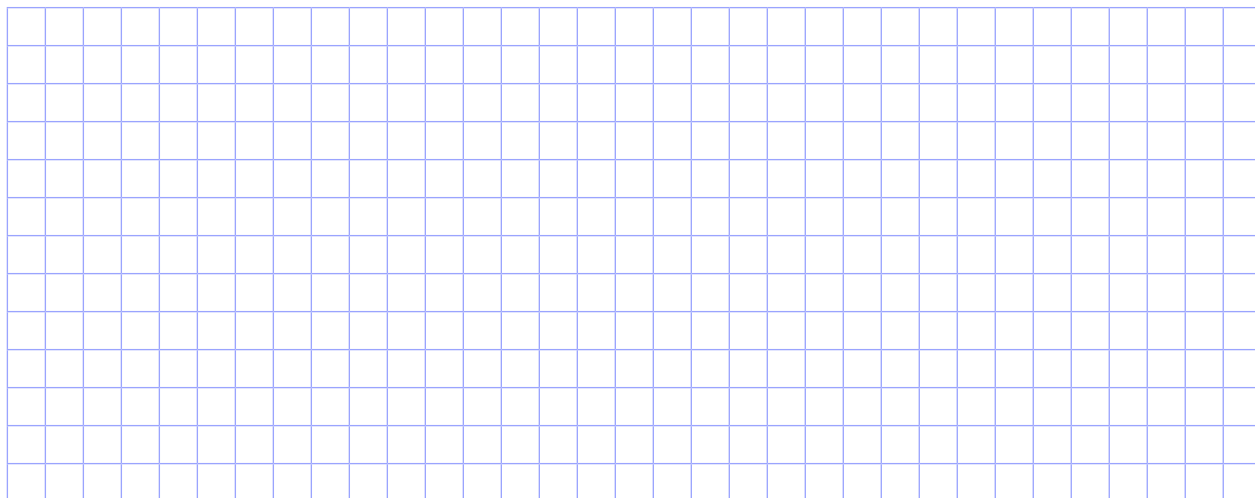
Число a	Ціле від'ємне число, яке ділиться на 2 без остачі	Ціле від'ємне число, яке не ділиться на 2 без остачі
Додатне значення $a > 0$		

Число a	Ціле від'ємне число, яке ділиться на 2 без остачі	Ціле від'ємне число, яке не ділиться на 2 без остачі
Від'ємне значення $a < 0$		

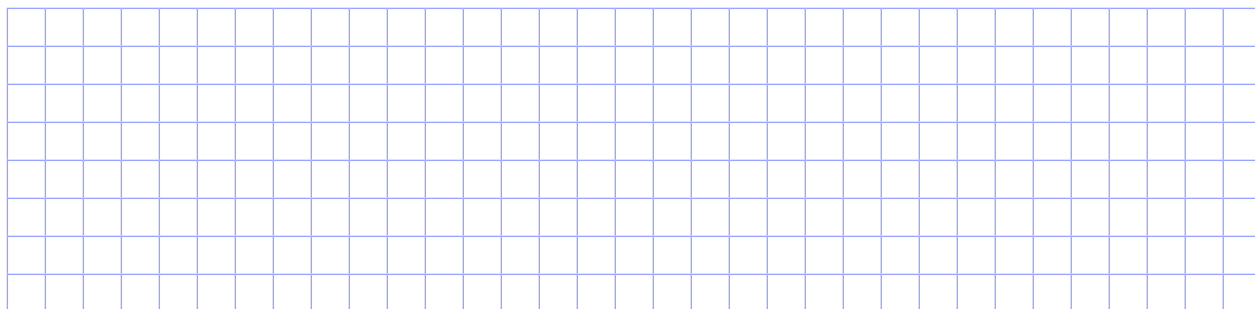
Приклад 2. Знайдіть коефіцієнт a , при якому графік функції $y = ax^{-2}$ проходить через точку $(-2; 0,125)$.



Приклад 3. Побудуйте графік функції $y = x \cdot \left(\frac{x}{x+3} \right)^{-1}$.



Приклад 4. Укажіть кількість коренів рівняння $2x^4 = 5x^{-2} + 3$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Магазин «Святкова магія» спеціалізується на продажу прикрас та декору, зокрема новорічних. Після завершення різдвяних свят попит на товари поступово зменшується. За спостереженнями власниці магазину, кількість проданих одиниць товару N (у штуках) залежить від кількості місяців t , що минули після свят, за формулою $N = 500t^2$, де $t = 1$ відповідає грудню. Середня ціна однієї прикраси становить 120 грн.

- 1) Обчисліть, скільки прикрас було продано в травні.
- 2) Знайдіть дохід магазину в травні.
- 3) Визначте, який дохід становитиме за шість місяців (з грудня по травень).
- 4) Власниця магазину планує 15 % від середньомісячного доходу відкладати для закупівлі нового асортименту товарів. Скільки грошей вона зможе відкласти?

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Чи проходить графік функції $y = x^{-5}$ через точку:
1) $A(0; 0)$; 2) $B(-1; -1)$; 3) $C(0,5; 32)$; 4) $D(-3; (-3)^5)$?
2. Дано функцію $f(x) = x^{-16}$. Порівняйте:
1) $f(1,6)$ і $f(2,2)$; 2) $f(-4,5)$ і $f(-3,6)$; 3) $f(-3,4)$ і $f(3,4)$; 4) $f(-18)$ і $f(3)$.
3. Дано функцію $f(x) = x^{-15}$. Порівняйте:
1) $f(-3,9)$ і $f(-2,5)$; 2) $f(0,4)$ і $f(-0,4)$; 3) $f(19)$ і $f(16)$; 4) $f(-26)$ і $f(3)$.
4. Знайдіть нулі функції:
1) $f(x) = x^{-5} + 1$; 2) $f(x) = 2x^{-3} - 16$; 3) $f(x) = x^{-4} + 2$; 4) $f(x) = 5x^{-2} + 1,25$.
5. Побудуйте графік функції:
1) $y = -x^4$; 2) $y = 3x^3$; 3) $y = -2x^3$; 4) $y = -0,5x^{-1}$.
6. При якому значенні параметра a , графік функції $y = ax^{-2}$ проходить через точку $A(0,5; 8)$?

Рівень В

1. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = x^{-1}$; 2) $y = (x - 2)^{-1}$; 3) $y = (x + 1)^{-2}$; 4) $y = (x - 3)^{-3}$.
2. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку:
1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(-\infty; -3]$.
3. Побудуйте графік функції:
1) $y = (x - 2)^0$; 2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$; 3) $y = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-1}$.

- 4.** При яких значення параметра a , графік функції $y = ax^4$ проходить через точку:
1) $A(2; -12)$; 2) $B(-3; -3)$?
- 5.** Побудуйте графік функції:
1) $y = -5x^{-2}$; 2) $y = 0,5x^{-3}$; 3) $y = -2x^{-1}$; 4) $y = -4x^{-4}$.
- 6.** Дослідіть на парність/непарність функцію:
1) $y = 2x^{-2} + 1$; 2) $y = -x^{-3} - 2$.
- 7.** Знайдіть коефіцієнт a , при якому графік функції $y = ax^{-2}$ проходить через задану точку:
1) $(1; 2)$; 2) $(2; 0,5)$; 3) $(-1; -3)$.
- 8.** Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:
1) $f(-2) > f(-1)$; 2) $f(-2) < f(-1)$; 3) $f(-2) < f(1)$; 4) $f(2) < f(1)$?
- 9.** Установіть кількість розв'язків системи рівняння графічним методом:
1) $\begin{cases} y = x^4, \\ y = x^{-2} + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-1}, \\ y = 2x^2 - 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = -3, \\ y - 2 = -x^{-1}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^{-3} = 1, \\ y + x^2 - 4 = 0. \end{cases}$
- 10.** Яка зі степеневих функцій 1) – 4) зростає на інтервалі $(0; 1)$?
1) $f(x) = 2x^{-1}$; 2) $f(x) = -2x^{-2}$; 3) $f(x) = -x^4$; 4) $f(x) = x^{-4}$.
- 11.** Побудуйте графік функції:
1) $y = (x + 3) \cdot \left(\frac{x + 3}{x}\right)^{-1}$; 2) $y = (x - 1) \left(\frac{x - 1}{x}\right)^{-1}$.
- 12.** Побудуйте графік функції:
1) $y = (x + 3)^0$; 2) $y = (\sqrt{x} - 2)^0$; 3) $y = (x^2 - 4x - 12)^0$.

Рівень С

- 1.** Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & x < -1, \\ x^2, & x \geq -1. \end{cases}$ За побудованим графіком, установіть проміжки зростання й спадання функції.
- 2.** Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ -\sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$ За побудованим графіком, установіть проміжки зростання й спадання функції.
- 3.** Побудуйте графік функції:
1) $f(x) = x^2 \cdot x^{-5}$; 2) $f(x) = \frac{x^{-1}}{x^3}$; 3) $f(x) = (x^3)^{-2}$; 4) $f(x) = x^0 \cdot x^5$.
- 4.** Побудуйте графіки функцій 1)–4). За графіком знайдіть область визначення, множину значень та нулі функції.
1) $y = (x - 3)^{-1}$; 2) $y = (x + 1)^{-2}$; 3) $y = |2x - 4|^{-3}$; 4) $y = 2(x - 1)^{-2}$.
- 5.** Установіть кількість коренів рівняння залежно від значень параметра a :
1) $2x^3 = x + a$; 2) $x^{-2} = a - x$; 3) $x^{-1} = (x + a)^2$; 4) $x^{-3} = a - 2x$.

Рефлексія

Коротко дайте відповіді на запитання, щоб підсумувати свої знання про степеневі функції.

1. Що нового я сьогодні дізнався/дізналася про степеневі функції?
2. Які властивості степеневої функції я можу пояснити однокласнику/однокласниці?
3. Яку функцію мені найцікавіше було досліджувати сьогодні?
4. У чому я ще відчуваю труднощі або потребу додаткового пояснення?
5. Як я можу застосувати знання про степеневі функції в практичних задачах або при вивченні інших предметів?

Можливі теми проєктів

1. Порівняння графіків степеневих функцій з парними та непарними показниками.
2. Побудова графіків степеневих функцій з від'ємними показниками: асимптоти та поведінка графіка при $x \rightarrow 0$.
3. Застосування степеневих функцій у фізиці, в економіці.
4. Поведінка степеневої функції при великих і малих значеннях аргументу функції.
5. Застосування властивостей степеневої функції при розв'язуванні прикладних задач.







