



Тема 2. Степенева функція

Урок 5. **Урок–практикум. Графіки степеневих функцій з цілими показниками**

Тип уроку: узагальнення та систематизації знань.

План уроку

1. Повторення.
2. Узагальнення властивостей степеневих функцій з натуральними та цілими показниками.
3. Графіки степеневих функцій з цілими показниками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати [12 МАО 4.2.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Розпочніть урок з повторення. Запропонуйте учням/ученицям розв'язати завдання, які найдоцільніші на ваш вибір.
- 2) Теорію подавайте стисло у вигляді схем та таблиць, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні.
- 3) До кожного теоретичного твердження наводьте кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на власний розсуд.
- 4) Заохочуйте учнів/учениць до самостійного дослідження властивостей функції та побудови її графіків.

5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в межах одного уроку, тому обирайте його обсяг на власний розсуд.

6) Обов'язково пропонуйте останні блоки уроку, а саме: розв'язування практичної задачі і тренувальні вправи, оскільки вони важливі для формування практичних навичок і навчання учнів/учениць самостійної роботи.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновано.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому для створення реалістичної анімації у грі треба знати як виглядає графік степеневої функції? Що спільного між цією кривою на координатній площині та поведінкою об'єктів у грі?

2) Чи важливо у фізичних дослідженнях знати наскільки швидко нагрівається або охолоджується тіло залежно від температури?

3) Навіщо вивчати властивості степеневих функцій?

4) Як змінюється графік степеневої функції з від'ємним показником?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$;

2) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}$;

3) $9 \cdot 0,1^{-1}$;

4) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

Відповіді. 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{24}{25}$; 3) 90; 4) $-\frac{2}{3}$.

2. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;

2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;

3) $(c^{-1} - d^{-1})(c - d)^{-2}$.

Відповідь. 1) $\frac{a+1}{a^3}$; 2) $\frac{m^5+n^5}{m^4n^4}$; 3) $-\frac{1}{cd(c-d)}$.

3. Якщо $x < 0$, то, які з функцій 1) – 4) зростають?

1) $y = x^2$;

2) $y = x^3$;

3) $y = x^{-1}$;

4) $y = x^{-4}$.

Відповідь. 3), 4).

4. Порівняйте:

1) 2^{-3} і $(\sqrt{3})^{-3}$;

2) $(-2)^{-2}$ і $(-4)^{-2}$.

Відповідь. $2^{-3} < (\sqrt{3})^{-3}$; $(-2)^{-2} > (-4)^{-2}$.

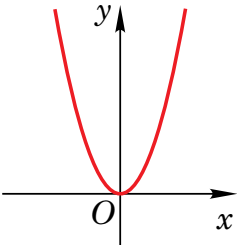
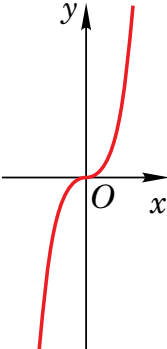
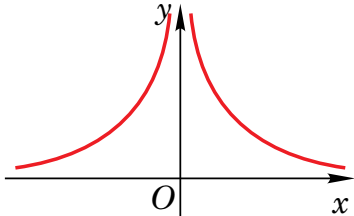
Як я вирішую певну проблему?

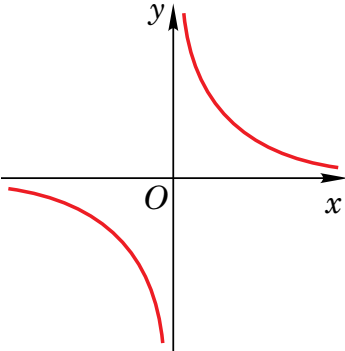
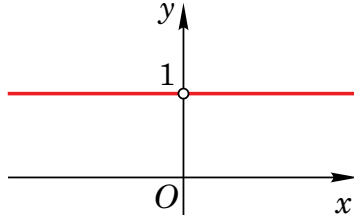
Задача. Магазин «Святкова магія» спеціалізується на продажу прикрас та декору, зокрема новорічних. Після завершення різдвяних свят попит на товари поступово зменшується. За спостереженнями власниці магазину, кількість проданих одиниць товару N (у штуках) залежить від кількості місяців t , що минули після свят, за формулою $N = 500t^2$, де $t = 1$ відповідає грудню. Середня ціна однієї прикраси становить 120 грн.

- 1) Обчисліть, скільки прикрас було продано в травні.
- 2) Знайдіть дохід магазину в травні.
- 3) Визначте, який дохід становитиме за шість місяців (з грудня по травень).
- 4) Власниця магазину планує 15 % від середньомісячного доходу відкладати для закупівлі нового асортименту товарів. Скільки грошей вона зможе відкласти?

III. Властивості степеневих функцій з натуральними та цілими показниками (5 хв)

Узагальнення властивостей степеневих функцій із натуральними та цілими показниками наведено в таблиці.

Властивість	$y = x^n$, n — парне	$y = x^n$, n — непарне	$y = x^k$, k — ціле від'ємне число, яке ділиться на 2 без остачі
Схематичний графік			
Область визначення	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$	$y \in (-\infty; +\infty)$	$y \in (0; +\infty)$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$	Немає
Проміжки монотонності	Якщо $x \in (-\infty; 0]$, то функція спадає, якщо $x \in [0; +\infty)$, то функція зростає	Зростає на всій області визначення	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то функція зростає, якщо $x \in (0; +\infty)$, то функція спадає

Властивість	$y = x^k$, k – ціле від'ємне число, яке не ділиться на 2 без остачі	$y = x^k$, $k = 0$
Схематичний графік		
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Множина значень	$y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$y = 1$
Нулі функції	Немає	Немає
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення	Монотонна на всій області визначення

Ілюстративні приклади (5–6 хв)

5. Знайдіть область визначення функції $y = (x^{-2})^{-1}$.

Розв'язання. За властивостями степенів: $(x^{-2})^{-1} = x^2$.

Однак, ОВФ знаходимо по початковій функції. Тому, $x^2 \neq 0$, $x \neq 0$.

Отже, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

6. Побудуйте графік функції $y = 2x^{-2} - 1$. Укажіть парність/непарність функції.

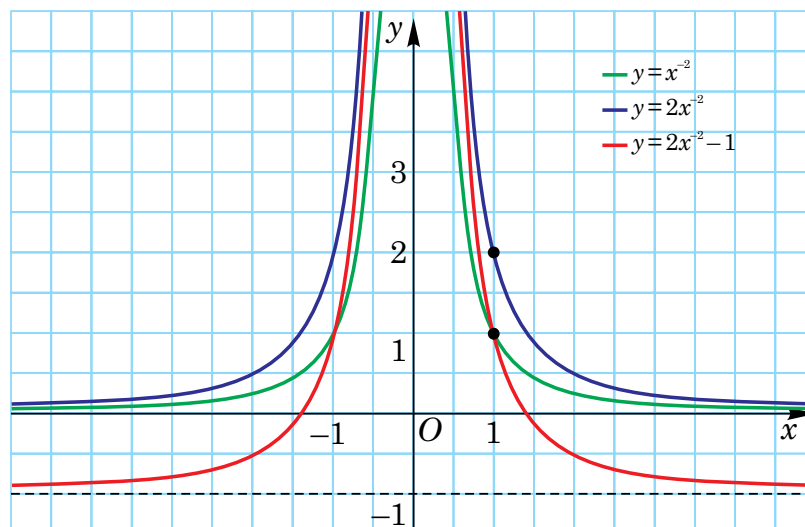
Розв'язання. Покрокова схема побудови графіка:

1) $y = x^{-2}$;

2) $y = 2x^{-2}$ — розтяг у два рази відносно осі Ox ;

3) $y = 2x^{-2} - 1$ — паралельне перенесення вздовж осі Oy на одиницю вниз.

Побудуємо графік функції (див. рисунок).



Оскільки графік функції симетричний відносно осі ординат, то функція — парна.
Відповідь. Парна.

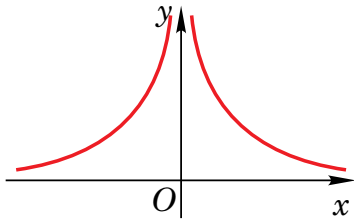
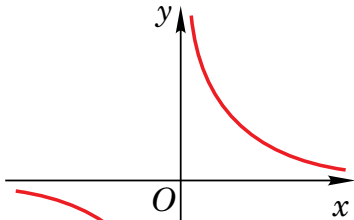
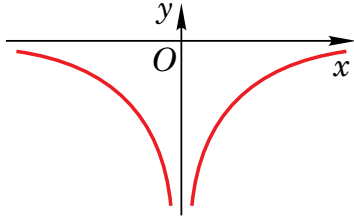
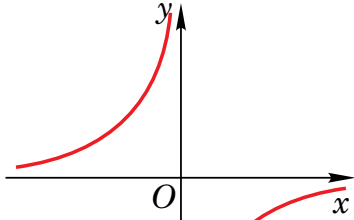
IV. Графіки степеневі функції з цілими показниками (4 хв)

Алгоритм побудови графіка степеневі функції $y = x^p$

1. За показником степеня p визначте вид функції.
2. Знайдіть область її визначення. Розв'яжіть відповідну нерівність.
3. Визначте, чи є функція парною, непарною або ні парною, ні непарною.
4. Знайдіть опорні точки. Обчисліть значення функції для кількох значень x , наприклад, при $x = -1; 0; 2$.
5. Позначте знайдені точки на координатній площині та з'єднайте їх плавною кривою, враховуючи симетрію графіка функції.

Опис графіка функції $y = ax^k$

1. Якщо $0 < a < 1$, то графік стискається до осі абсцис.
Наприклад, якщо $a = 0,5$, то кожне значення функції зменшується вдвічі.
2. Якщо $a > 1$, то графік стискається до осі ординат.
Наприклад, якщо $a = 2$, то кожне значення функції подвоюється.
3. Якщо $a < 0$, то відбувається відображення графіка відносно осі x .
Усі додатні значення стають від'ємними, і навпаки (див. таблицю).

Число a	Ціле від'ємне число, яке ділиться на 2 без остачі	Ціле від'ємне число, яке не ділиться на 2 без остачі
Додатне значення $a > 0$		
Від'ємне значення $a < 0$		

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

7. Знайдіть коефіцієнт a , при якому графік функції $y = ax^{-2}$ проходить через точку $(-2; 0,125)$.

Розв'язання. Оскільки графік функції $y = ax^{-2}$ проходить через точку $(-2; 0,125)$, то координати точки підставимо у формулу: $a \cdot (-2)^{-2} = 0,125$; $a \cdot 0,25 = 0,125$, звідси $a = 0,5$.

Отже, початкова функція має вигляд $y = 0,5x^{-2}$.

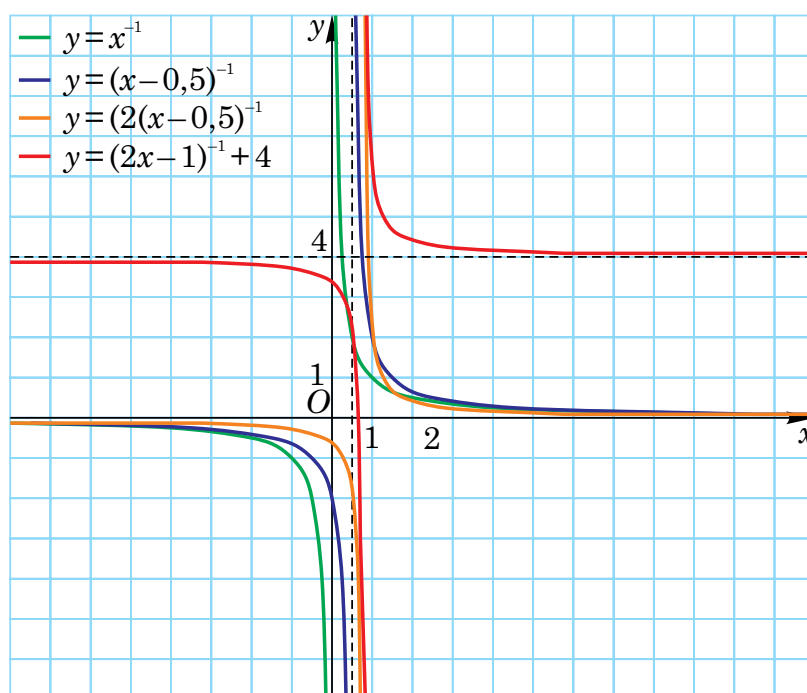
Відповідь. 0,5.

8. Побудуйте графік функції $y = (2x - 1)^{-1} + 4$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення функції: $y = (2(x - 0,5))^{-1} + 4$.

Покрокова схема побудови графіка функції:

- 1) $y = x^{-1}$;
- 2) $y = (x - 0,5)^{-1}$ — паралельне перенесення вздовж осі Ox на 0,5 одиниці праворуч;
- 3) $y = (2(x - 0,5))^{-1}$ — стиск удвічі до осі Oy ;
- 4) $y = (2x - 1)^{-1} + 4$ — паралельне перенесення вздовж осі Oy на 4 одиниці вгору.



9. Побудуйте графік функції $y = x \cdot \left(\frac{x}{x+3} \right)^{-1}$.

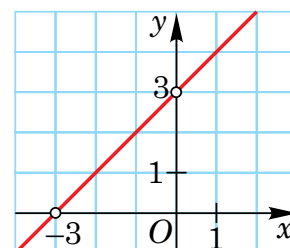
Розв'язання. Знайдемо область визначення функції: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$

Отже, аргумент функції може набувати всіх значень, крім 0 і -3 .

Виконаємо перетворення формули, що задає функцію:

$$y = x \cdot \frac{x+3}{x} = x+3.$$

Отже, графіком функції є пряма лінія $y = x + 3$ з «виколотими» точками 0 і -3 . Графік функції побудовано рисунку.

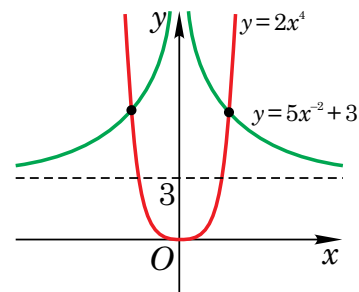


10. Укажіть кількість коренів рівняння $2x^4 = 5x^{-2} + 3$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $f(x) = 2x^4$ та $g(x) = 5x^{-2} + 3$ (див. рисунок).

Оскільки графіки функцій перетинаються у двох точках, то рівняння має два корені.

Відповідь. Два корені.



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Магазин «Святкова магія» спеціалізується на продажу прикрас та декору, зокрема новорічних. Після завершення різдвяних свят попит на товари поступово зменшується. За спостереженнями власниці магазину, кількість проданих одиниць товару N (у штуках) залежить від кількості місяців t , що минули після свят, за формулою $N = 500t^{-2}$, де $t = 1$ відповідає грудню. Середня ціна однієї прикраси становить 120 грн.

- 1) Обчисліть, скільки прикрас було продано в травні.
- 2) Знайдіть дохід магазину в травні.
- 3) Визначте, який дохід становитиме за шість місяців (з грудня по травень).
- 4) Власниця магазину планує 15 % від середньомісячного доходу відкладати для закупівлі нового асортименту товарів. Скільки грошей вона зможе відкласти?

Розв'язання. 1) Обчислимо кількість прикрас, які було продано в травні ($t = 6$):

$$N = 500 \cdot 6^{-2} \approx 13,9 \approx 14 \text{ (прикрас)}.$$

2) Обчислимо приблизний дохід (P) у травні:

$$P = N \cdot 120 = 14 \cdot 120 = 1680 \text{ (грн)}.$$

3) Обчислимо кількість проданих прикрас кожного місяця та дохід від їхнього продажу:

$$t = 1, N_1 = 500 \cdot 1^{-1} = 500 \text{ (прикрас)}, P_1 = 500 \cdot 120 = 60000 \text{ (грн)}.$$

$$t = 2, N_2 = 500 \cdot 2^{-1} = 125 \text{ (прикрас)}, P_2 = 125 \cdot 120 = 15000 \text{ (грн)}.$$

$$t = 3, N_3 = 500 \cdot 3^{-1} \approx 56 \text{ (прикрас)}, P_3 = 56 \cdot 120 = 6720 \text{ (грн)}.$$

$$t = 4, N_4 = 500 \cdot 4^{-1} \approx 31 \text{ (прикрас)}, P_4 = 31 \cdot 120 = 3720 \text{ (грн)}.$$

$$t = 5, N_5 = 500 \cdot 5^{-1} = 20 \text{ (прикрас)}, P_5 = 20 \cdot 120 = 2400 \text{ (грн)}.$$

Сумарний дохід за шість місяців становить:

$$60000 + 15000 + 6720 + 3720 + 2400 + 1680 = 89520 \text{ (грн)}.$$

4) Обчислимо середньомісячний дохід:

$$89520 : 6 = 14920 \text{ (грн)}.$$

$$\text{Знайдемо } 15 \% \text{ від цієї суми: } 14920 \cdot 0,15 = 2238 \text{ (грн)}.$$

Отже, для купівлі нового асортименту товарів потрібно щомісяця відкласти 2238 грн.

Відповідь. 1) 14 прикрас; 2) 1680 грн; 3) 89520 грн; 4) 2238 грн.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

- Чи проходить графік функції $y = x^{-5}$ через точку:
1) $A(0; 0)$; 2) $B(-1; -1)$; 3) $C(0,5; 32)$; 4) $D(-3; (-3)^5)$?
- Дано функцію $f(x) = x^{-16}$. Порівняйте:
1) $f(1,6)$ і $f(2,2)$; 2) $f(-4,5)$ і $f(-3,6)$; 3) $f(-3,4)$ і $f(3,4)$; 4) $f(-18)$ і $f(3)$.
- Дано функцію $f(x) = x^{-15}$. Порівняйте:
1) $f(-3,9)$ і $f(-2,5)$; 2) $f(0,4)$ і $f(-0,4)$; 3) $f(19)$ і $f(16)$; 4) $f(-26)$ і $f(3)$.
- Знайдіть нулі функції:
1) $f(x) = x^{-5} + 1$; 2) $f(x) = 2x^{-3} - 16$; 3) $f(x) = x^{-4} + 2$; 4) $f(x) = 5x^{-2} + 1,25$.
- Побудуйте графік функції:
1) $y = -x^4$; 2) $y = 3x^3$; 3) $y = -2x^3$; 4) $y = -0,5x^{-1}$.
- При якому значенні параметра a , графік функції $y = ax^{-2}$ проходить через точку $A(0,5; 8)$?

Рівень В

- Знайдіть область визначення функції:
1) $y = x^{-1}$; 2) $y = (x - 2)^{-1}$; 3) $y = (x + 1)^{-2}$; 4) $y = (x - 3)^{-3}$.
- Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку:
1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(-\infty; -3]$.
- Побудуйте графік функції:
1) $y = (x - 2)^0$; 2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$; 3) $y = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-1}$.
- При яких значення параметра a , графік функції $y = ax^4$ проходить через точку:
1) $A(2; -12)$; 2) $B(-3; -3)$?
- Побудуйте графік функції:
1) $y = -5x^{-2}$; 2) $y = 0,5x^{-3}$; 3) $y = -2x^{-1}$; 4) $y = -4x^{-4}$.
- Дослідіть на парність/непарність функцію:
1) $y = 2x^{-2} + 1$; 2) $y = -x^{-3} - 2$.
- Знайдіть коефіцієнт a , при якому графік функції $y = ax^{-2}$ проходить через задану точку:
1) $(1; 2)$; 2) $(2; 0,5)$; 3) $(-1; -3)$.
- Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:
1) $f(-2) > f(-1)$; 2) $f(-2) < f(-1)$; 3) $f(-2) < f(1)$; 4) $f(2) < f(1)$?
- Установіть кількість розв'язків системи рівняння графічним методом:
1) $\begin{cases} y = x^4, \\ y = x^{-2} + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-1}, \\ y = 2x^2 - 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = -3, \\ y - 2 = -x^{-1}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^{-3} = 1, \\ y + x^2 - 4 = 0. \end{cases}$

- 10.** Яка зі степеневих функцій 1) – 4) зростає на інтервалі $(0; 1)$?
1) $f(x) = 2x^{-1}$; 2) $f(x) = -2x^{-2}$; 3) $f(x) = -x^4$; 4) $f(x) = x^{-4}$.

- 11.** Побудуйте графік функції:

1) $y = (x + 3) \cdot \left(\frac{x + 3}{x} \right)^{-1}$; 2) $y = (x - 1) \left(\frac{x - 1}{x} \right)^{-1}$.

- 12.** Побудуйте графік функції:

1) $y = (x + 3)^0$; 2) $y = (\sqrt{x} - 2)^0$; 3) $y = (x^2 - 4x - 12)^0$.

Рівень С

- 1.** Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & x < -1, \\ x^2, & x \geq -1. \end{cases}$ За побудованим графіком, встановіть проміжки зростання й спадання функції.

- 2.** Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ -\sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$ За побудованим графіком, встановіть проміжки зростання й спадання функції.

- 3.** Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = x^2 \cdot x^{-5}$; 2) $f(x) = \frac{x^{-1}}{x^3}$; 3) $f(x) = (x^3)^{-2}$; 4) $f(x) = x^0 \cdot x^5$.

- 4.** Побудуйте графіки функцій 1)–4). За графіком знайдіть область визначення, множину значень та нулі функції.

1) $y = (x - 3)^{-1}$; 2) $y = (x + 1)^{-2}$; 3) $y = |2x - 4|^{-3}$; 4) $y = 2(x - 1)^{-2}$.

- 5.** Установіть кількість коренів рівняння залежно від значень параметра a :

1) $2x^3 = x + a$; 2) $x^{-2} = a - x$; 3) $x^{-1} = (x + a)^2$; 4) $x^{-3} = a - 2x$.

VII. Рефлексія (2 хв)

Коротко дайте відповіді на запитання, щоб підсумувати свої знання про степеневі функції.

1. Що нового я сьогодні дізнався/дізналася про степеневі функції?
2. Які властивості степеневої функції я можу пояснити однокласнику/однокласниці?
3. Яку функцію мені найцікавіше було досліджувати сьогодні?
4. У чому я ще відчуваю труднощі або потребу додаткового пояснення?
5. Як я можу застосувати знання про степеневі функції в практичних задачах або при вивченні інших предметів?

Можливі теми проєктів

1. Порівняння графіків степеневих функцій з парними та непарними показниками.
2. Побудова графіків степеневих функцій з від'ємними показниками: асимптоти та поведінка графіка при $x \rightarrow 0$.
3. Застосування степеневих функцій у фізиці, в економіці.

4. Поведінка степеневих функцій при великих і малих значеннях аргументу функції.
5. Застосування властивостей степеневих функцій при розв'язуванні прикладних задач.

Список використаних джерел

- 1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручн. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Харків: Гімназія, 2018. — 256 с. : іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень: підручн. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Харків: Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.
- 3) Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підручн. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Київ: УОВЦ «Оріон», 2018. — 288 с. : іл.