

Урок 6. Графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь, що містять степеневі функції з натуральними та цілими показниками

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите основні властивості степеневих функцій;
- 2) навчитесь будувати графіки степеневих функцій із цілими показниками, за геометричними перетвореннями;
- 3) дослідите, як зміна коефіцієнтів і паралельне перенесення впливають на вигляд графіка функції;
- 4) навчитесь порівнювати графіки різних степеневих функцій та робити висновки про їхню поведінку;
- 5) зрозумієте, як розв'язувати рівняння та системи рівнянь, що містять степеневі функції, використовуючи графічний метод;
- 6) ознайомитесь із принципами функціонального підходу Коші та його застосуванням у дослідженні степеневих функцій.

II. Повторення

1. Установіть відповідність між функцією (1–3) та її властивістю (А–Д).

(Пробне ЗНО, 2015 р.).

Функція

1 $y = x^2$

2 $y = x^3 + 1$

3 $y = 3 - x$

Властивість

А зростає на всій області визначення

Б спадає на всій області визначення

В є непарною

Г є парною

Д областю значень є проміжок $(0; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

2. Обчисліть значення виразу:

1) 2^{-3} ;

2) $(-3)^2$;

3) $(-2)^{-4}$;

4) $(0,5)^{-3}$.

3. Спростіть вираз, за властивостями степенів:

1) $x^3 \cdot x^{-5}$;

2) $(a^{-2})^{-3}$;

3) $\frac{b^4}{b^{-2}}$;

4) $(2x^{-1}y^2)^3$.

4. Знайдіть область визначення функції 1), 2) та дослідіть її на парність/непарність.

1) $y = -x^3$;

2) $y = x^{-2}$.

III. Побудова графіків степеневих функції з цілими показниками за допомогою геометричних перетворень

Побудову графіків функцій можна виконувати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = x^{-n}$.

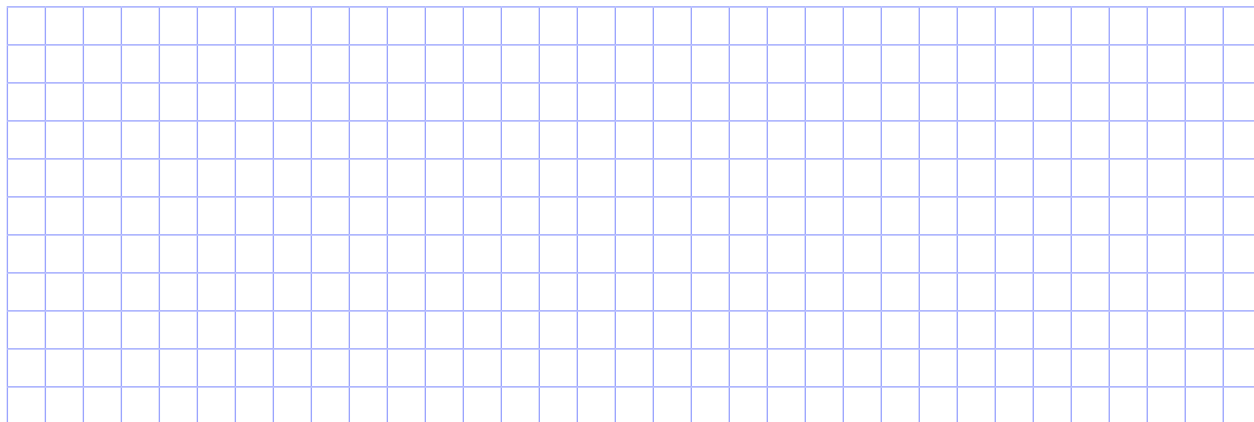
Перетворення	Формула
Паралельне перенесення графіка вздовж осі Oy на b одиниць.	$y = x^{-n} + b$.
Паралельне перенесення графіка вздовж осі Ox на $-a$ одиниць.	$y = (x - a)^{-n}$.
При $k > 1$ розтяг графіка від осі абсцис в k разів. При $0 < k < 1$ стиск графіка до осі абсцис в $\frac{1}{k}$ разів.	$y = kx^{-n}, k > 0$.
При $k > 1$ стиск графіка до осі ординат в k разів. При $0 < k < 1$ розтяг графіка від осі ординат в $\frac{1}{k}$ разів.	$y = (kx)^{-n}, k > 0$.
Симетрія відносно осі Oy .	$y = (-x)^{-n}$.
Симетрія відносно осі Ox .	$y = -x^{-n}$.
Частину графіка у верхній півплощині і на осі абсцис залишаємо без змін, а частину графіка в нижній півплощині, симетрично відображаємо відносно осі Ox .	$y = x^{-n} $.
Частину графіка для $x \geq 0$ симетрично відображаємо відносно осі Oy .	$y = x ^{-n}$.

Алгоритм побудови графіка степеневі функції за допомогою геометричних перетворень

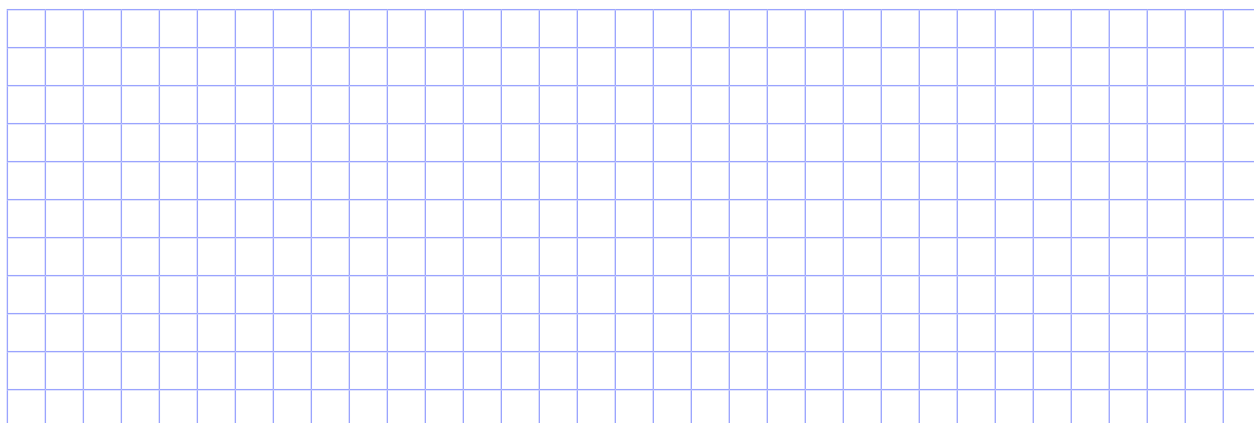
1. Побудуйте графік функції $y = x^{-n}$.

2. Визначте послідовність перетворень (переміщення по осях координат, відображення, розтягнення тощо).
3. В одній координатній площині побудуйте графік кожного перетворення функції $y = x^{-n}$.
4. Позначте остаточний графік функції.

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = (x + 1)^{-2} - 3$.



Приклад 2. Побудуйте графік функції $y = -0,5x^{-3} + 1$.



IV. Графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь, що містять степеневі функції з натуральними та цілими показниками

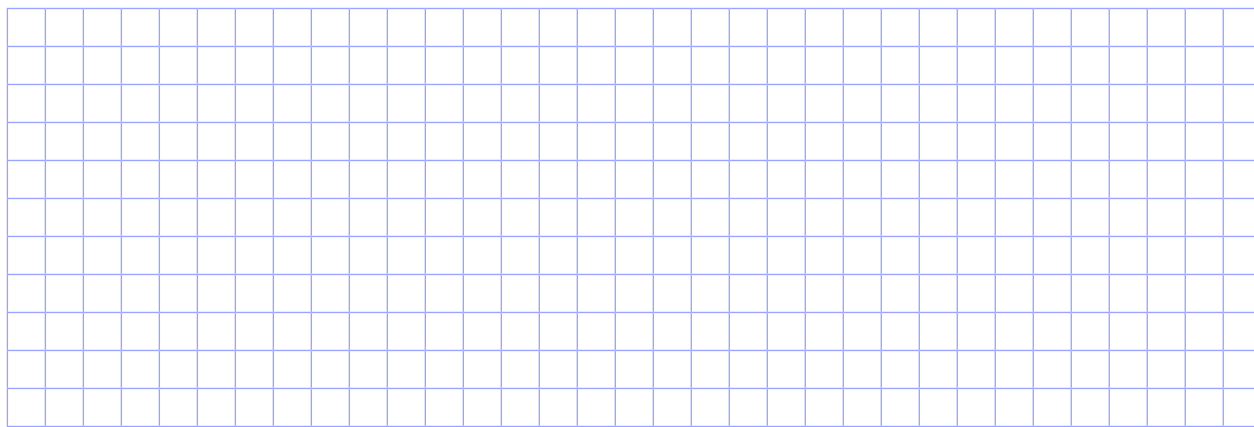
Схема розв'язування рівняння графічним методом

1. Будуємо графік лівої частини рівняння.
2. Будуємо графік правої частини рівняння.
3. Визначаємо координати точок перетину графіків, абсциси яких є коренями рівняння.

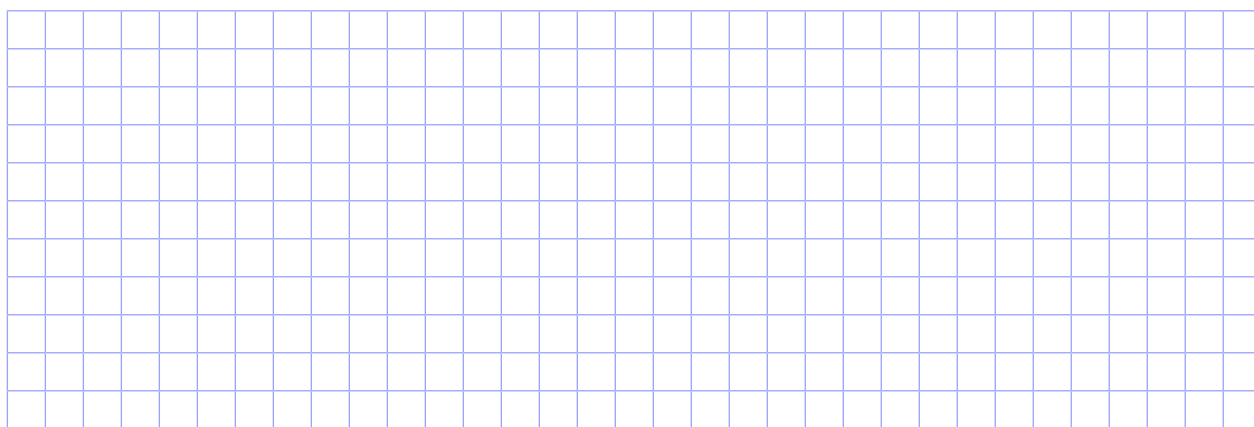
Схема розв'язування систем рівнянь графічним методом

1. Будуємо графік першого рівняння системи.
2. Будуємо графік другого рівняння системи.
3. Визначаємо координати точок перетину графіків, які є розв'язками системи.

Приклад 4. Установіть графічно кількість коренів рівняння $x^{-2} = x^2 - 4$.



Приклад 5. Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} y = x^{-4}, \\ y = x^2 + 2. \end{cases}$



V. Функційний підхід Коші

Рівняння, у яких потрібно знайти значення змінних, при підстановці яких у рівняння отримаємо правильну рівність, називають числовими. У математиці вивчають й інші рівняння, розв'язками яких є не числа, а функції. Їх називають функційними рівняннями.

Наприклад, рівність $f(x) = f(-x)$, де $x \in D(f)$, яка визначає умову парності функцій, можна розглядати як функційне рівняння. Розв'язком цього рівняння є будь-яка парна функція.

Ось ще два приклади функційних рівнянь:

$$f(x + y) = f(y) + x, \text{ де } x \in R, y \in R;$$

$$f(x + y) = 2f(y) + x - y, \text{ де } x \in R, y \in R.$$

Приклад 5. Розв'яжіть функційне рівняння $f(x + y) = f(y) + x$, де $x \in R, y \in R$.

Розв'язання. Якщо в рівність $f(x + y) = f(y) + x$ підставити значення змінної $y = 0$, то отримаємо: $f(x) = f(0) + x$.

Оскільки $f(0)$ — деяка константа, то тим самим доведено, що розв'язками рівняння можуть бути лише лінійні функції виду $f(x) = x + c$, де c — константа.

Проте, наведені міркування не гарантують того, що кожна лінійна функція виду $f(x) = x + c$ задовольняє функційне рівняння.

Отже, треба виконати перевірку.

$(x + y) + c = (y + c) + x$, маємо тотожність. Тому функції $f(x) = x + c$ — розв’язки функційного рівняння.

Зауважимо, що перевірка — важлива частина розв’язання рівняння, оскільки при перевірці відкидаються сторонні розв’язки.

$$f(xy) = f(x) f(y).$$
[illegible]

1. Через скільки секунд пляшка впаде на дно яру?
2. На якій висоті буде пляшка через 1 секунду після початку падіння; через 3 секунди?
3. Через який час пляшка буде перебувати на висоті 30 метрів до дна яру? Опором повітря нехтуємо.

15

- 2.** Побудуйте графік функції і визначте інтервали монотонності функції:
 1) $y = (x - 2)^7$; 2) $y = (x + 1)^5$; 3) $y = (x + 2)^{-2}$; 4) $y = (x - 1)^{-3}$.
- 3.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = x^{-4} - 3$; 2) $y = (x - 3)^{-4}$; 3) $y = \frac{1}{3}x^{-2}$.
- 4.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = -x^{-1}$; 2) $y = (x + 2)^{-1}$; 3) $y = (2x)^{-1}$; 4) $y = -(x - 3)^{-1}$.
- 5.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = -x^{-2}$; 2) $y = (x - 1)^{-2}$; 3) $y = 2x^{-2}$; 4) $y = -2(x + 1)^{-2}$.
- 6.** Розв'яжіть графічно рівняння:
 1) $x^{-1} = 2 - x$; 2) $-x^2 = x - 1$; 3) $2(x - 1)^{-1} = x$; 4) $x^{-3} = -x$.
- 7.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:
 1) $\begin{cases} y = x^{-1}, \\ y = x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^{-2}, \\ y = 2x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 2(x - 1)^{-1}, \\ y = x - 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = -x. \end{cases}$
- 8.** Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:
 1) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 3. \end{cases}$

Рівень В

- 1.** Установіть графічно кількість коренів рівняння:
 1) $x^{-2} = 3x - 2$; 2) $x^{-3} = 1 - x^2$; 3) $x^4 = 2x - 5$;
 4) $x^6 = x^{-2}$; 5) $x^{-3} = 1$; 6) $x^4 = 3x - 3$.
- 2.** Побудуйте графік рівняння:
 1) $(y + 2)^0 = x - 2$; 2) $(y - 2)^0 = (x + 1)^0$.
- 3.** Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:
 1) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$
- 4.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = x^{-2} + 2$; 2) $y = (x - 1)^{-3}$; 3) $y = \frac{1}{x|x|}$.
- 5.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = x^{-5} - 3$; 2) $y = (x + 1)^{-4}$; 3) $y = |x^{-5}|$.
- 6.** Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1, \\ x^{-3}, & x \geq 1. \end{cases}$ За графіком, укажіть проміжки зростання й спадання функції.
- 7.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = |x|^{-3}$; 2) $y = |x|^5$; 3) $y = |x| + 1$;
 4) $y = |x|^{-5} - 2$; 5) $y = |x + 2|^{-3}$; 6) $y = |2x|^{-3}$.
- 8.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = x^{-1} - 2$; 2) $y = -2(x + 1)^{-1} + 3$;
 3) $y = (x - 2)^{-2} - 1$; 4) $y = -3(x^3 + 1)$.

Рівень С

1. Побудуйте графік функції:
1) $y = (x + 5)^0$; 2) $y = (\sqrt{x} - 1)^0$; 3) $y = (x^2 - 8x + 12)^0$.
2. Розв'яжіть графічно нерівність:
1) $x^{-1} > x$; 2) $-x^{-2} < x - 1$; 3) $(x - 2)^{-1} \leq 0$; 4) $2x^{-3} \geq x$.
3. Побудуйте графік функції:
1) $y = |x| x^3$; 2) $y = |x| x^4 - x^5$.
4. Скільки коренів має рівняння $x^8 = 9a - a^3$ залежно від значень параметра a ?
5. Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння:
1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?
6. Знайдіть усі функції $f(x)$, які задовольняють умову $f(x) + f(y) = x + y$, де $x \in R, y \in R$.
7. Знайдіть усі функції $f(x)$, які задовольняють умову $f(xy + 1) = f(x) + 1$, де $x \in R, y \in R$.
8. Знайдіть усі функції $f(x)$, які задовольняють умову $f(y + f(x)) = (x - 1) f(y)$, де $x \in R, y \in R$.

Рефлексія

1. На уроці я дізнався/дізналася
.....
.....
2. Мені найбільше запам'яталося
.....
.....
3. Для мене було найцікавішим
.....
.....
4. Для мене було найскладнішим
.....
.....
5. Я припустився/припустилася помилки
.....
.....
6. Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.....
.....
7. Поради собі до наступного уроку
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Моделювання реальних процесів степеневими функціями.
2. Степеневі функції у комп'ютерній графіці та 3D-моделюванні.
3. Фрактали й степеневі функції.
4. Функційне рівняння Коші: ідея, історія, розв'язки.
5. Функційний підхід Коші у побудові степеневої функції.







