



Тема 2. Степенева функція

Урок 6. Графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь, що містять степеневі функції з натуральними та цілими показниками

Тип уроку: формування умінь і навичок.

План уроку

1. Побудова графіків степеневої функції з цілими показниками за допомогою геометричних перетворень.
2. Графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь, що містять степеневі функції з натуральними та цілими показниками.
- 3*. Функційний підхід Коші.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Розпочніть урок із мотиваційних запитань, які підводять учнів/учениць до основних понять нового матеріалу.
- 2) Завдання для повторення обирайте на власний розсуд.
- 3) Теоретичний матеріал подавайте стисло, з акцентом на його практичному застосуванні.
- 4) Для пояснення нових понять використовуйте таблиці, схеми та опорні конспекти, щоб забезпечити наочність і логічність викладу.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів, які допоможуть учням/ученицям краще засвоїти матеріал.

- 6) Увесь запропонований матеріал подано з надлишком, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 7) Заплануйте проведення останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичної задачі та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навичок і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Під час розв'язання задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачі, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чому важливо розуміти форму графіка ще до його побудови?
- 2) Чому графічний метод розв'язання рівнянь та їхніх систем ефективний у складних рівняннях або системах рівнянь?
- 3) Чому знання про зростання й спадання функції допомагає в економіці чи природничих науках?
- 4) Як математики виявили закономірності у функціях ще до появи комп'ютерів і калькуляторів?
- 5) Як степеневі функції допомагають описати поведінку технічних процесів?

II. Повторення (3–4 хв)

- 1.** Установіть відповідність між функцією (1–3) та її властивістю (А–Д).
(Пробне ЗНО, 2015 р.).

Функція

1 $y = x^2$

2 $y = x^3 + 1$

3 $y = 3 - x$

Властивість

А зростає на всій області визначення

Б спадає на всій області визначення

В є непарною

Г є парною

Д областю значень є проміжок $(0; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Г, 2 – А, 3 – Б.

- 2.** Обчисліть значення виразу:

1) 2^{-3} ;

2) $(-3)^2$;

3) $(-2)^{-4}$;

4) $(0,5)^{-3}$.

Відповідь. 1) $\frac{1}{8}$; 2) 9; 3) $\frac{1}{16}$; 4) 8.

- 3.** Спростіть вираз, за властивостями степенів:

1) $x^3 \cdot x^{-5}$;

2) $(a^{-2})^{-3}$;

3) $\frac{b^4}{b^{-2}}$;

4) $(2x^{-1}y^2)^3$.

Відповідь. 1) x^{-2} ; 2) a^6 ; 3) b^6 ; 4) $8x^{-3}y^6$.

4. Знайдіть область визначення функції 1), 2) та дослідіть її на парність/непарність.
 1) $y = -x^3$; 2) $y = x^{-2}$.
 Відповідь. 1) $D(y) = R$, непарна; 2) $D(y) = R \setminus \{0\}$, парна.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Мандрівник зупинився біля краю яру. Коли він діставав пляшку води з багажника квадроцикла, то пляшка випала і почала вільно падати вниз. Глибина яру становить 70 метрів. Початкова швидкість пляшки дорівнює нулю. Висоту, на якій перебуває пляшка впродовж падіння, описує функція: $h(t) = 70 - \frac{gt^2}{2}$, де $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, t — час (у секундах).

- Через скільки секунд пляшка впаде на дно яру?
- На якій висоті буде пляшка через 1 секунду після початку падіння; через 3 секунди?
- Через який час пляшка буде перебувати на висоті 30 метрів до дна яру? Опором повітря нехтуємо.

III. Побудова графіків степеневих функції з цілими показниками за допомогою геометричних перетворень (5 хв)

Побудову графіків функцій можна виконувати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = x^{-n}$.

Перетворення	Формула
Паралельне перенесення графіка вздовж осі Oy на b одиниць.	$y = x^{-n} + b$.
Паралельне перенесення графіка вздовж осі Ox на $-a$ одиниць.	$y = (x - a)^{-n}$.
При $k > 1$ розтяг графіка від осі абсцис в k разів. При $0 < k < 1$ стиск графіка до осі абсцис в $\frac{1}{k}$ разів.	$y = kx^{-n}$, $k > 0$.
При $k > 1$ стиск графіка до осі ординат в k разів. При $0 < k < 1$ розтяг графіка від осі ординат в $\frac{1}{k}$ разів.	$y = (kx)^{-n}$, $k > 0$.
Симетрія відносно осі Oy .	$y = (-x)^{-n}$.
Симетрія відносно осі Ox .	$y = -x^{-n}$.
Частину графіка у верхній півплощині і на осі абсцис залишаємо без змін, а частину графіка в нижній півплощині, симетрично відображаємо відносно осі Ox .	$y = x^{-n} $.
Частину графіка для $x \geq 0$ симетрично відображаємо відносно осі Oy .	$y = x ^{-n}$.

Алгоритм побудови графіка степеневі функції за допомогою геометричних перетворень

- Побудуйте графік функції $y = x^{-n}$.
- Визначте послідовність перетворень (переміщення по осях координат, відображення, розтягнення тощо).

3. В одній координатній площині побудуйте графік кожного перетворення функції $y = x^{-n}$.
4. Позначте остаточний графік функції.

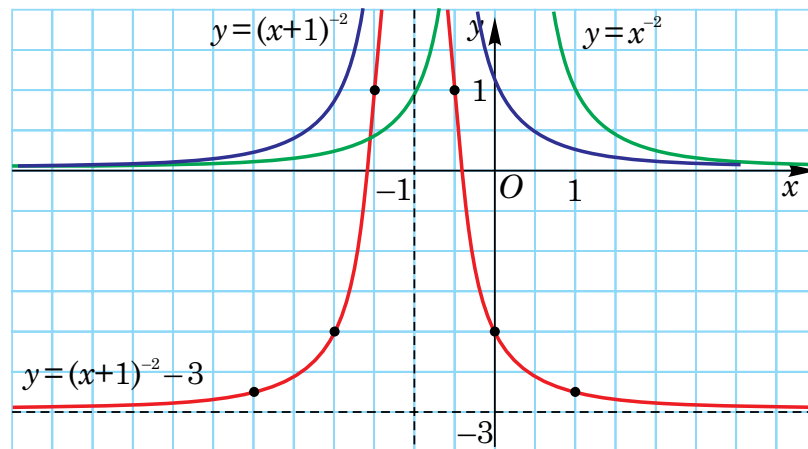
Ілюстративні приклади (7 хв)

5. Побудуйте графік функції $y = (x + 1)^{-2} - 3$.

Розв'язання. Схема побудови графіка функції:

- 1) $y = x^{-2}$;
- 2) $y = (x + 1)^{-2}$ — паралельне перенесення на одну одиницю ліворуч;
- 3) $y = (x + 1)^{-2} - 3$ — паралельне перенесення на три одиниці вниз.

Графік побудовано на рисунку.

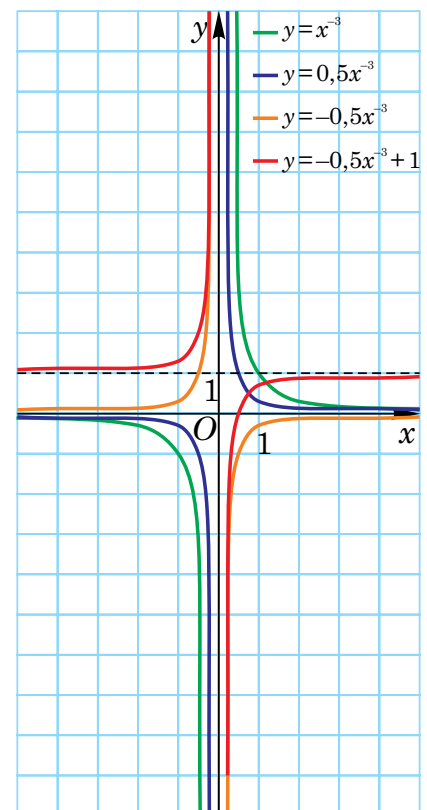


6. Побудуйте графік функції $y = -0,5x^{-3} + 1$.

Розв'язання. Схема побудови графіка функції:

- 1) $y = x^{-3}$;
- 2) $y = 0,5x^{-3}$ — графік стискається вдвічі до осі абсцис;
- 3) $y = -0,5x^{-3}$ — симетричне відображення графіка відносно осі абсцис;
- 4) $y = -0,5x^{-3} + 1$ — паралельне перенесення графіка на одну одиницю вгору.

Графік побудовано на рисунку.



IV. Графічний метод розв'язування рівнянь та систем рівнянь, що містять степеневі функції з натуральними та цілими показниками

Схема розв'язування рівняння графічним методом

1. Будуємо графік лівої частини рівняння.
2. Будуємо графік правої частини рівняння.
3. Визначаємо координати точок перетину графіків, абсциси яких є коренями рівняння.

Схема розв'язування систем рівнянь графічним методом

1. Будуємо графік першого рівняння системи.
2. Будуємо графік другого рівняння системи.
3. Визначаємо координати точок перетину графіків, які є розв'язками системи.

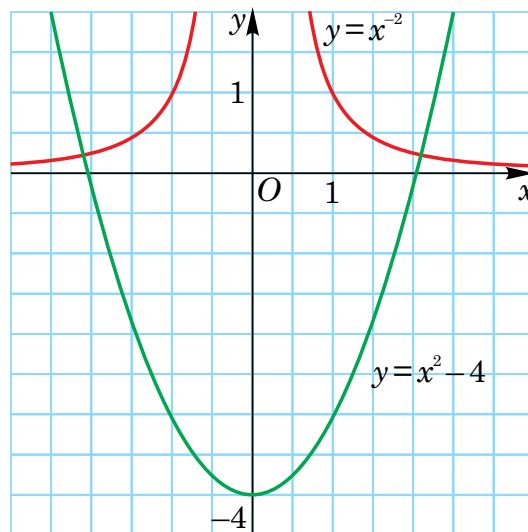
Ілюстративні приклади (6–8 хв)

7. Установіть графічно кількість коренів рівняння $x^{-2} = x^2 - 4$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функції $f(x) = x^{-2}$ і $g(x) = x^2 - 4$ (див. рисунок).

Графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ перетинаються в двох точках, тому рівняння має два корені.

Відповідь. Два.

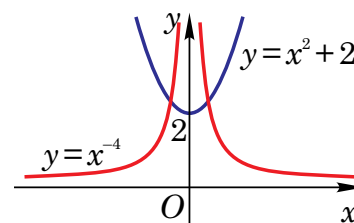


8. Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} y = x^{-4}, \\ y = x^2 + 2. \end{cases}$$

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функції $y = x^{-4}$ та $y = x^2 + 2$ (див. рисунок).

Оскільки графіки перетинаються в двох точках, то система рівнянь має два розв'язки.

Відповідь. Два.



9. Розв'яжіть нерівність $x^6 > 5$ графічним методом.

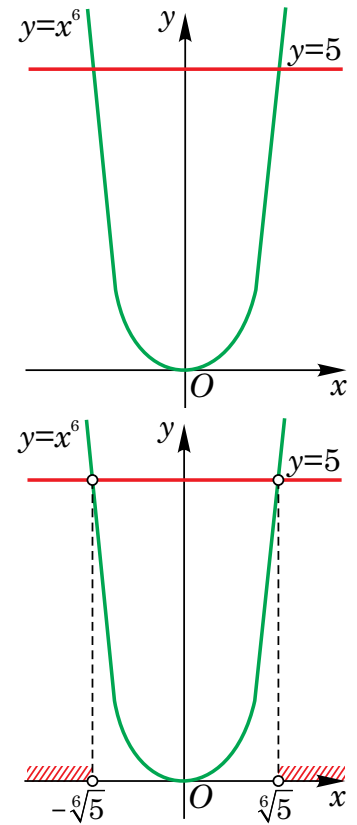
Розв'язання. Побудуємо ескізи графіків функцій $f(x) = x^6$ і $g(x) = 5$ (див. рисунок).

Позначимо частини кривої $f(x) = x^6$, які розміщені вище прямої $g(x) = 5$ і спроектуємо їх на вісь Ox (див. рисунок).

Множина розв'язків нерівності $x^6 > 5$:

$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, де x_1 та x_2 — корені рівняння $x^6 = 5$, тобто $x_1 = -\sqrt[6]{5}$, $x_2 = \sqrt[6]{5}$.

Відповідь. $(-\infty; -\sqrt[6]{5}) \cup (\sqrt[6]{5}; +\infty)$.



V. Функційний підхід Коші (5–7 хв)

Рівняння, у яких потрібно знайти значення змінних, при підстановці яких у рівняння отримаємо правильну рівність, називають числовими. У математиці вивчають й інші рівняння, розв'язками яких є не числа, а функції. Їх називають функційними рівняннями.

Наприклад, рівність $f(x) = f(-x)$, де $x \in D(f)$, яка визначає умову парності функцій, можна розглядати як функційне рівняння. Розв'язком цього рівняння є будь-яка парна функція.

Ось ще два приклади функційних рівнянь:

$$f(x + y) = f(y) + x, \text{ де } x \in R, y \in R;$$

$$f(x + y) = 2f(y) + x - y, \text{ де } x \in R, y \in R.$$

10. Розв'яжіть функційне рівняння $f(x + y) = f(y) + x$, де $x \in R, y \in R$.

Розв'язання. Якщо в рівність $f(x + y) = f(y) + x$ підставити значення змінної $y = 0$, то отримаємо: $f(x) = f(0) + x$.

Оскільки $f(0)$ — деяка константа, то тим самим доведено, що розв'язками рівняння можуть бути лише лінійні функції виду $f(x) = x + c$, де c — константа.

Проте, наведені міркування не гарантують того, що кожна лінійна функція виду $f(x) = x + c$ задовольняє функційне рівняння.

Отже, треба виконати перевірку.

Підставимо функцію $f(x) = x + c$ у задане функційне рівняння:

$(x + y) + c = (y + c) + x$, маємо тотожність. Тому функції $f(x) = x + c$ — розв'язки функційного рівняння.

Відповідь. $f(x) = x + c$, де c — будь-яка стала.

Зауважимо, що перевірка — важлива частина розв'язання рівняння, оскільки при перевірці відкидаються сторонні розв'язки.

Функційні рівняння відіграють важливу роль у математиці. Оскільки кожне функційне рівняння задає певну властивість функції, то за допомогою функційних рівнянь можна визначити конкретні класи функцій. Такий спосіб визначення функцій через опис їхніх характерних властивостей у вигляді функційних рівнянь запровадив відомий французький математик Огюстен Луї Коші. Його ім'я носять такі функційні рівняння:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

$$f(x + y) = f(x) f(y),$$

$$f(xy) = f(x) f(y).$$

Ілюстративний приклад (3–4 хв)

- 11.** Чи існує функція $f: R \rightarrow R$ така, що для всіх $x, y \in R$, $f(x + y) = f(x) + f(y) + x$?

Розв'язання. Підставимо $x = y = 0$, отримаємо $f(0) = 0$.

Виконаємо підстановку $y = 0$, отримаємо $f(x) = f(x) + x$, що неможливо для всіх дійсних x .

Отже, такої функції не існує.

Відповідь. Не існує.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Мандрівник зупинився біля краю яру. Коли він діставав пляшку води з багажника квадроцикла, то пляшка випала і почала вільно падати вниз. Глибина яру становить 70 метрів. Початкова швидкість пляшки дорівнює нулю. Висоту, на якій перебуває пляшка впродовж падіння, описує функція: $h(t) = 70 - \frac{gt^2}{2}$, де $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, t — час (у секундах).

- Через скільки секунд пляшка впаде на дно яру?
- На якій висоті буде пляшка через 1 секунду після початку падіння; через 3 секунди?
- Через який час пляшка буде перебувати на висоті 30 метрів до дна яру? Опором повітря нехтуємо.

Розв'язання. 1) Оскільки $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, то функція матиме вигляд $h(t) = 70 - 4,9t^2$.

Побудуємо графік функції (див. рисунок).

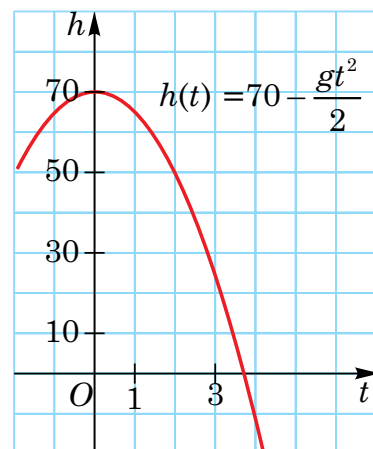
2) Знаходимо точку перетину графіка з віссю абсцис, коли висота дорівнює 0: $(3,8; 0)$.

Отже, пляшка досягне дна яру приблизно через 3,8 секунд.

Виконаємо перевірку:

$$70 - 4,9t^2 = 0, \quad -4,9t^2 = -70,$$

$$t^2 \approx 14,29, \text{ звідси } t \approx 3,78 \text{ (с).}$$



3) Через 1 секунду від початку падіння пляшка буде на висоті близько 65 метрів (див. графік). Для точного обчислення знайдемо значення $h(1)$:

$$h(1) = 70 - 4,9 = 65,1 \text{ (м)}.$$

4) Через 3 секунди від початку падіння пляшка буде на висоті близько 25 метрів (див. графік). Для точного обчислення знайдемо значення $h(3)$:

$$h(3) = 70 - 4,9 \cdot 3^2 = 25,9 \text{ (м)}.$$

5) На висоті 30 метрів пляшка опиниться приблизно через 2,8 секунди після падіння. Для обчислення точного значення розв'яжемо рівняння:

$$70 - 4,9 \cdot t^2 = 30, \quad -4,9 \cdot t^2 = 30 - 70, \quad -4,9 \cdot t^2 = -40, \quad t^2 \approx 8,16, \quad t \approx 2,86 \text{ (м)}.$$

Відповідь. 1) 3,78 с. 2) 65,1 м. 3) 25,9 м. 4) 2,86 с.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. В одній системі координат побудуйте графік функції:

1) $y = x^3$ і $y = x^{-1}$; 2) $y = x^4$ і $y = x^{-4}$; 3) $y = x^2$ і $y = x^{-2}$; 4) $y = x^5$ і $y = x^{-5}$.

Знайдіть області визначення та множину значень функцій.

2. Побудуйте графік функції і визначте інтервали монотонності функції:

1) $y = (x - 2)^7$; 2) $y = (x + 1)^5$; 3) $y = (x + 2)^{-2}$; 4) $y = (x - 1)^{-3}$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-4} - 3$; 2) $y = (x - 3)^{-4}$; 3) $y = \frac{1}{3}x^{-2}$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = -x^{-1}$; 2) $y = (x + 2)^{-1}$; 3) $y = (2x)^{-1}$; 4) $y = -(x - 3)^{-1}$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = -x^{-2}$; 2) $y = (x - 1)^{-2}$; 3) $y = 2x^{-2}$; 4) $y = -2(x + 1)^{-2}$.

6. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^{-1} = 2 - x$; 2) $-x^2 = x - 1$; 3) $2(x - 1)^{-1} = x$; 4) $x^{-3} = -x$.

7. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^{-1}, \\ y = x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^{-2}, \\ y = 2x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 2(x - 1)^{-1}, \\ y = x - 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = -x. \end{cases}$

8. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 3. \end{cases}$

Рівень В

1. Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $x^{-2} = 3x - 2$; 2) $x^{-3} = 1 - x^2$; 3) $x^4 = 2x - 5$;
4) $x^6 = x^{-2}$; 5) $x^{-3} = 1$; 6) $x^4 = 3x - 3$.

2. Побудуйте графік рівняння:

1) $(y + 2)^0 = x - 2$; 2) $(y - 2)^0 = (x + 1)^0$.

3. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$$

4. Побудуйте графік функції:

$$1) y = x^{-2} + 2; \quad 2) y = (x - 1)^{-3}; \quad 3) y = \frac{1}{x|x|}.$$

5. Побудуйте графік функції:

$$1) y = x^{-5} - 3; \quad 2) y = (x + 1)^{-4}; \quad 3) y = |x^{-5}|.$$

6. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1, \\ x^{-3}, & x \geq 1. \end{cases}$ За графіком, укажіть проміжки зростання й спадання функції.

7. Побудуйте графік функції:

$$\begin{array}{lll} 1) y = |x|^{-3}; & 2) y = |x|^5; & 3) y = |x| + 1; \\ 4) y = |x|^{-5} - 2; & 5) y = |x + 2|^{-3}; & 6) y = |2x|^{-3}. \end{array}$$

8. Побудуйте графік функції:

$$\begin{array}{ll} 1) y = x^{-1} - 2; & 2) y = -2(x + 1)^{-1} + 3; \\ 3) y = (x - 2)^{-2} - 1; & 4) y = -3(x^3 + 1). \end{array}$$

Рівень С

1. Побудуйте графік функції:

$$1) y = (x + 5)^0; \quad 2) y = (\sqrt{x} - 1)^0; \quad 3) y = (x^2 - 8x + 12)^0.$$

2. Розв'яжіть графічно нерівність:

$$1) x^{-1} > x; \quad 2) -x^{-2} < x - 1; \quad 3) (x - 2)^{-1} \leq 0; \quad 4) 2x^{-3} \geq x.$$

3. Побудуйте графік функції:

$$1) y = |x| x^3; \quad 2) y = |x| x^4 - x^5.$$

4. Скільки коренів має рівняння $x^8 = 9a - a^3$ залежно від значень параметра a ?

5. Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння:

$$1) x^{12} = a - 6; \quad 2) x^{24} = a^2 + 7a - 8?$$

6. Знайдіть усі функції $f(x)$, які задовольняють умову $f(x) + f(y) = x + y$, де $x \in R, y \in R$.

7. Знайдіть усі функції $f(x)$, які задовольняють умову $f(xy + 1) = f(x) + 1$, де $x \in R, y \in R$.

8. Знайдіть усі функції $f(x)$, які задовольняють умову $f(y + f(x)) = (x - 1)f(y)$, де $x \in R, y \in R$.

VIII. Рефлексія (2 хв)

1. На уроці я дізнався/дізналася

.....

.....

2. Мені найбільше запам'яталося
-
-
3. Для мене було найцікавішим
-
-
4. Для мене було найскладнішим
-
-
5. Я припустився/припустилася помилки
-
-
6. Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
-
-
7. Поради собі до наступного уроку
-
-

Можливі теми проєктів

1. Моделювання реальних процесів степеневими функціями.
2. Степеневі функції у комп'ютерній графіці та 3D-моделюванні.
3. Фрактали й степеневі функції.
4. Функційне рівняння Коші: ідея, історія, розв'язки.
5. Функційний підхід Коші у побудові степеневої функції.

Список використаних джерел

- 1) Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : профільний рівень : збірник задач і контрольних робіт. — Харків : Гімназія, 2018. — 144 с. : іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підручн. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Харків : Гімназія, 2018. — 256 с. : іл.
- 3) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : профільний рівень : підручн. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Харків : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.