

Урок 8. **Урок–практикум. Поняття оберненої функції та взаємно обернених функцій**

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите означення оберненої функції та дізнаєтесь, за яких умов функція має обернену;
- 2) з'ясуєте, що означає взаємна оберненість двох функцій і як це перевірити на практиці;
- 3) навчитесь будувати графік оберненої функції за графіком даної функції;
- 4) вивчите теореми про монотонність функції та оберненої до неї функції;
- 5) застосуєте набуті знання для розв'язування вправ і практичних задач.

II. Повторення

1. Виразіть змінну x через змінну y :

1) $y = \frac{x+7}{3}$;

2) $y = \frac{10}{x-2} + 6$;

3) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{5} - 1$.

2. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 2x + 3$;

2) $y = \frac{x-5}{3}$;

3) $y = x^3$.

3. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\frac{3x-1}{x+2}}$.

III. Означення взаємно обернених функцій

Означення. Функції $f(x)$ і $g(x)$ називають **взаємно оберненими**, якщо:

1) $D(f) = E(g)$, $E(f) = D(g)$;

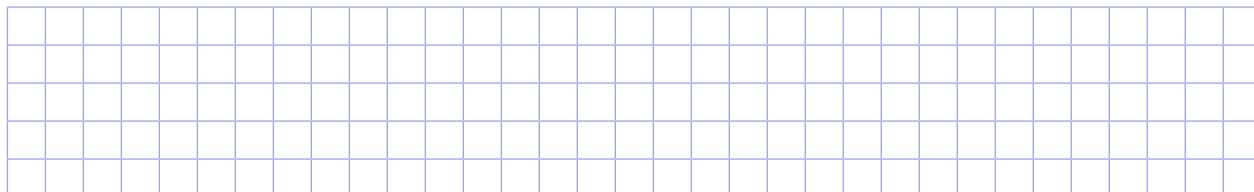
2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ із рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, якщо $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $y = x^2$ є оборотною на множині $[0; +\infty)$. Знайдемо функцію, обернену до функції $f(x)$. Оскільки $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$, то $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Рівність $\sqrt{y} = x$ задає функцію з аргументом y і залежною змінною x .

Якщо застосуємо традиційне позначення, то отримаємо функцію $y = \sqrt{x}$, обернену до функції $f(x)$.

Приклад 1. Доведіть, що функції $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = \frac{x+1}{2}$ — взаємно обернені.



Приклад 2. Установіть відповідність між функцією (1–3) та оберненою до неї функцією (А – Г).

Функція

1 $y = 2x + 5$

2 $y = \frac{3}{x-1}$

3 $y = (x+4)^3$

Обернена функція

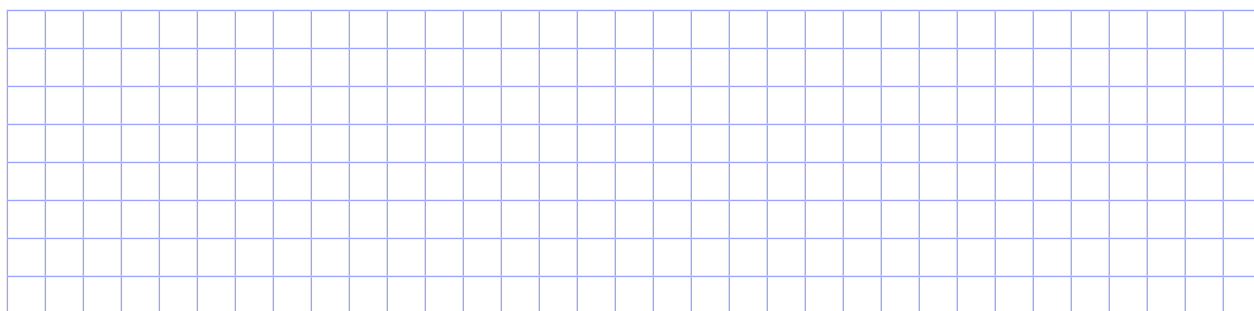
А $y = \sqrt{x} + 2$

Б $y = \frac{x-5}{2}$

В $y = \sqrt[3]{x} - 4$

Г $y = \frac{3}{x} + 1$

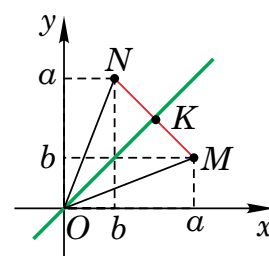
	А	Б	В	Г
1	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐



IV. Теорема про симетричність графіків взаємно обернених функцій відносно прямої $y = x$

Теорема. Графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ симетричні відносно прямої $y = x$.

Доведення. Нехай точка $M(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$ (див. рисунок). Тоді $b = f(a)$. Якщо функція $g(x)$ є оберненою до функції $f(x)$, то $g(b) = a$, тобто точка $N(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$. Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$. Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються і належать прямій $y = x$.



Якщо $a \neq b$, то $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$. Оскільки $ON = OM$, то точка O — рівновіддалена від кінців відрізка MN . Отже, точка O належить серединному перпендикуляру відрізка MN .

Середина K відрізка MN має координати $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y = x$.

Отже, пряма $y = x$ є серединним перпендикуляром відрізка MN .

V. Теорема про монотонність функції та оберненої до неї функції

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою, то й обернена до неї функція $y = g(x)$ є зростаючою. Якщо функція $y = f(x)$ є спадною, то й обернена до неї функція — спадна.

Доведення. Припустимо, що функція $f(x)$ зростаюча, але обернена до неї функція $g(x)$ не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливає нерівність $g(y_1) \geq g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$, тому $x_1 \geq x_2$. Оскільки функція $f(x)$ зростаюча, то $f(x_1) \geq f(x_2)$, тобто $y_1 \geq y_2$. Отримали суперечність. Тому припущення неправильне. Отже, функція $y = g(x)$ є зростаючою.

Для спадної функції доведення аналогічне.

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Двоє друзів вирішили взяти участь у марафоні з подолання відстані між двома містами, яка становить 120 км. Перший із них їде на електровелосипеді, а другий — на електросамокаті. Швидкість кожного залежить від часу t (у год) і визначається за формулою: $v(t) = \frac{120}{t}$.

- 1) Знайдіть обернену функцію, яка визначає швидкість руху залежно від часу.
- 2) Скільки часу потрібно велосипедисту, щоб подолати всю відстань, якщо він буде рухатись зі швидкістю 20 км/год?
- 3) Хто швидше дістанеться місця призначення, якщо друзі будуть рухатися з максимальними швидкостями?

Примітка. Максимальну швидкість електровелосипеда та електросамоката знайдіть із доступних джерел інформації.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Функція $y = g(x)$ є оберненою до функції $y = f(x)$. Заповніть таблицю:

Властивість	$y = f(x)$	$y = g(x)$
Область визначення	$[-3; 3]$	
Множина значень	$[1; 5]$	
Монотонність функції	зростаюча	

2. Запишіть формулу функції, обернену до функції 1) – 4). Укажіть область визначення і множину значень оберненої функції.

1) $y = 3x - 6$; 2) $y = -3x - 6$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = \sqrt{x}$.

3. Доведіть, що функції $f(x)$ і $g(x)$ — взаємно обернені:

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $g(x) = 3x - 1$;
 2) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0; +\infty)$.

4. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 0,2x + 3$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$; 3) $y = \frac{4}{x+2}$.

5. В одній системі координат побудуйте графік заданої функції та графік функції, оберненої до неї:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = x^2 - 4$, якщо $x \geq 0$.

6. Доведіть, що функція 1) – 4) не є оборотною:

1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$; 4) $y = [x]$.

Рівень В

1. Запишіть формулу функції, обернену до функції 1) – 8). Побудуйте графік заданої функції, та графік функції, оберненої заданій.

1) $y = 2x - 2$; 2) $y = -0,5x + 1$; 3) $y = 0,5x - 1$; 4) $y = -2x + 2$;
 5) $y = 2x$; 6) $y = x - 2$; 7) $y = -\frac{1}{x}$; 8) $y = \frac{1}{x-1}$.

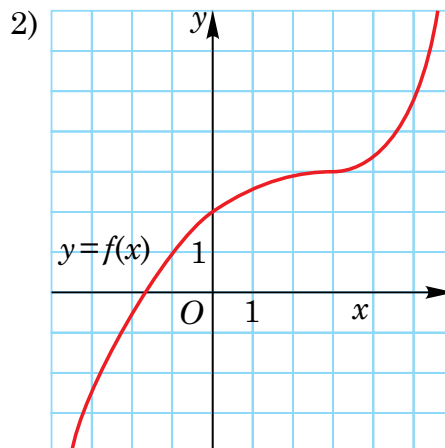
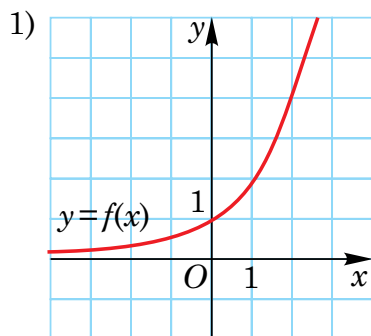
2. В одній системі координат побудуйте графік функції 1) – 4) та графік функції, оберненої до неї. Укажіть область визначення та область значень оберненої функції.

1) $y = x^2$, $x \leq 0$; 2) $y = \frac{2}{x}$; 3) $y = x^2$, $x \geq 1$; 4) $y = -\frac{1}{x}$.

3. В одній системі координат побудуйте графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

1) $y = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 2x, & x < 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2}x, & x < 0. \end{cases}$

4. За графіком функції $y = f(x)$, зображеному на рисунку, побудуйте графік функції, оберненої до функції $f(x)$.



5. Задайте функцію, обернену до даної, та побудуйте її графік:

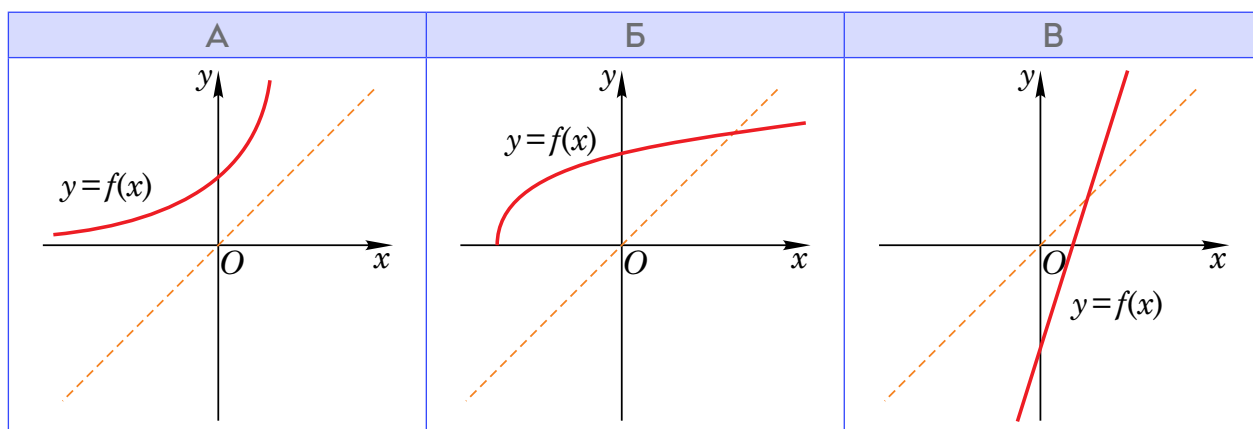
1) $f(x) = 4x - 3$; 2) $f(x) = 4 - x$; 3) $f(x) = \sqrt{x + 5}$.

6. Задайте функцію, обернену до даної, та побудуйте її графік:

1) $y = \begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ 4x, & x > 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq -1, \\ x - 2, & x > -1; \end{cases}$ 3) $y = \begin{cases} 0,5x + 1, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$

Рівень С

1. За графіком функцій $f(x)$, зображених на рисунку, побудуйте графік функції $g(x)$, яка обернена до функції $f(x)$.



2. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 2x + 4$; 2) $y = \frac{5}{x + 2}$;
 3) $y = 1 + \sqrt{x + 3}$; 4) $y = x^2$, якщо $x \in [2; +\infty]$.

3. Доведіть, що функція $y = \frac{2x + 3}{5x - 2}$ збігається з оберненою до неї функцією.

4. Нехай функція $g(x)$ — обернена до функції $f(x) = x^3 + \sqrt{x - 2}$.

- 1) Знайдіть $g(28)$.
 2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = 1$.
 3) Чи існує значення c таке, що рівняння $g(x) = c$ має два корені?

5. Доведіть, що функція, обернена до лінійної функції $y = kx + b$ при $k \neq 0$, також — лінійна.

6. Функція $g(x)$ є оберненою до функції $f(x) = x^3 + x + 12$. Розв'яжіть рівняння $g(x) = x^3 + x - 12$.

Рефлексія. «Пошук аналогій»

Знайдіть аналогії з життєвих ситуацій, які могли би сприяти розумінню оберненої функції. Наприклад, чи дія «повернення» може бути схожою на знаходження оберненої функції? Можна використати приклади з фізики, з економіки, з побуту.

Можливі теми проєктів

1. Історія розвитку вчення про обернені функції.
2. Застосування обернених функцій у фізиці та в економіці.
3. Числові методи для знаходження обернених функцій.
4. Побудова графіків функцій та їхніх обернених функцій. Симетрія графіків функцій.







