



Тема 2. Степенева функція

Урок 8. **Урок–практикум. Поняття оберненої функції та взаємно обернених функцій**

Тип уроку: формування умінь і навичок.

План уроку

1. Повторення.
2. Означення оберненої функції та взаємно обернених функцій.
3. Теорема про симетричність графіків взаємно обернених функцій відносно прямої $y = x$.
4. Теорема про монотонність функції та оберненої до неї функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Розпочніть урок із повторення. Запропонуйте учням/ученицям розв'язати завдання, які найдоцільніші, на вашу думку.
- 2) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні.
- 3) Обирайте ілюстративні приклади на власний розсуд.
- 4) Заохочуйте учнів/учениць до самостійного дослідження властивостей взаємно обернених функцій та побудови їхніх графіків.
- 5) Обсяг запропонованого матеріалу обирайте на власний розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте останні блоки уроку, а саме: розв'язування практичної задачі та тренувальні вправи, оскільки вони є важливим компонентом формування практичних навичок та навчання учнів/учениць самостійної роботи.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Пропонуйте можливі теми для створення проєктів.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи важливо в повсякденному житті мати можливість знаходити обернені значення для процесів чи явищ, щоби правильно відновлювати початкові умови або приймати рішення?

2) Як визначати початкові умови в задачах з економіки, коли є дані про витрати та доходи на певний момент часу?

3) Чи використовуються обернені функції в криптографії для розшифрування інформації, коли ми маємо алгоритм для її шифрування?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Виразіть змінну x через змінну y :

1) $y = \frac{x+7}{3}$;

2) $y = \frac{10}{x-2} + 6$;

3) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{5} - 1$.

Відповідь. 1) $x = 3y - 7$; 2) $x = \frac{2y-2}{y-6}$; 3) $x = 25(y+1)^2 - 2$.

2. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 2x + 3$;

2) $y = \frac{x-5}{3}$;

3) $y = x^3$.

Відповідь. 1) $y = \frac{x-3}{2}$; 2) $y = 3x + 5$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$.

3. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\frac{3x-1}{x+2}}$.

Відповідь. $D(y) = (-\infty; 2) \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Двоє друзів вирішили взяти участь у марафоні з подолання відстані між двома містами, яка становить 120 км. Перший із них їде на електровелосипеді, а другий — на електросамокаті. Швидкість кожного залежить від часу t (у год) і визначається за формулою: $v(t) = \frac{120}{t}$.

1) Знайдіть обернену функцію, яка визначає швидкість руху залежно від часу.

2) Скільки часу потрібно велосипедисту, щоб подолати всю відстань, якщо він буде рухатись зі швидкістю 20 км/год?

3) Хто швидше дістанеться місця призначення, якщо друзі будуть рухатися з максимальними швидкостями?

Примітка. Максимальну швидкість електровелосипеда та електросамоката знайдіть із доступних джерел інформації.

III. Означення взаємно обернених функцій

Означення. Функції $f(x)$ і $g(x)$ називають **взаємно оберненими**, якщо:

1) $D(f) = E(g)$, $E(f) = D(g)$;

2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ із рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, якщо $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $y = x^2$ є оборотною на множині $[0; +\infty)$. Знайдемо функцію, обернену до функції $f(x)$. Оскільки $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$, то $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Рівність $\sqrt{y} = x$ задає функцію з аргументом y і залежною змінною x .

Якщо застосуємо традиційне позначення, то отримаємо функцію $y = \sqrt{x}$, обернену до функції $f(x)$.

Ілюстративні приклади (4–5 хв)

- 4.** Доведіть, що функції $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = \frac{x+1}{2}$ — взаємно обернені.

Доведення. Маємо $D(f) = E(g) = R$, $E(f) = D(g) = R$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Справді, $g(y_0) = \frac{y_0+1}{2} = \frac{2x_0-1+1}{2} = x_0$.

- 5.** Установіть відповідність між функцією (1–3) та оберненою до неї функцією (А – Г).

Функція

1 $y = 2x + 5$

2 $y = \frac{3}{x-1}$

3 $y = (x+4)^3$

Обернена функція

А $y = \sqrt{x} + 2$

Б $y = \frac{x-5}{2}$

В $y = \sqrt[3]{x} - 4$

Г $y = \frac{3}{x} + 1$

А Б В Г

1 ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐

Відповідь. 1 – Б, 2 – Г, 3 – В.

IV. Теорема про симетричність графіків взаємно обернених функцій відносно прямої $y = x$ (5–7 хв)

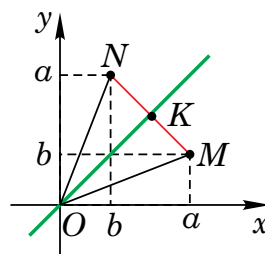
Теорема. Графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ симетричні відносно прямої $y = x$.

Доведення. Нехай точка $M(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$ (див. рисунок). Тоді $b = f(a)$. Якщо функція $g(x)$ є оберненою до функції $f(x)$, то $g(b) = a$, тобто точка $N(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$. Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$. Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються і належать прямій $y = x$.

Якщо $a \neq b$, то $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$. Оскільки $ON = OM$, то точка O — рівновіддалена від кінців відрізка MN . Отже, точка O належить серединному перпендикуляру відрізка MN .

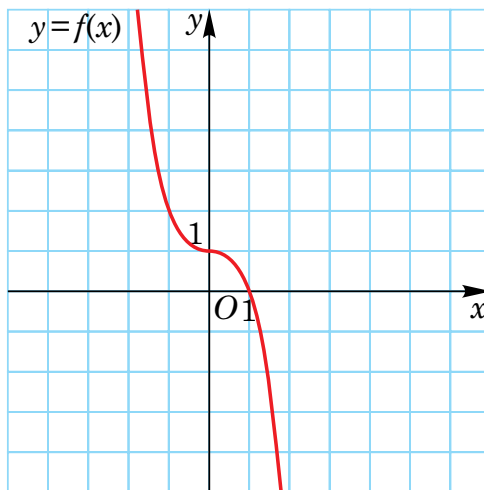
Середина K відрізка MN має координати $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y = x$.

Отже, пряма $y = x$ є серединним перпендикуляром відрізка MN .



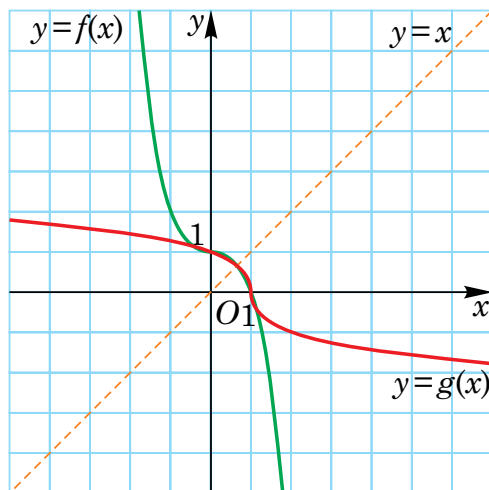
Ілюстративний приклад

6. Побудуйте схематичний графік функції, оберненої до заданої функції (див. рисунок).



Розв'язання. Оскільки графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, то побудуємо пряму як $y = x$.

Побудуємо графік, симетричний заданому відносно прямої $y = x$ (див. рисунок).



V. Теорема про монотонність функції та оберненої до неї функції (5–6 хв)

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою, то й обернена до неї функція $y = g(x)$ є зростаючою. Якщо функція $y = f(x)$ є спадною, то й обернена до неї функція — спадна.

Доведення. Припустимо, що функція $f(x)$ зростаюча, але обернена до неї функція $g(x)$ не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливає нерівність $g(y_1) \geq g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$, тому $x_1 \geq x_2$. Оскільки функція $f(x)$ зростаюча, то $f(x_1) \geq f(x_2)$, тобто $y_1 \geq y_2$. Отримали суперечність. Тому припущення неправильне. Отже, функція $y = g(x)$ є зростаючою.

Для спадної функції доведення аналогічне.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (6–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

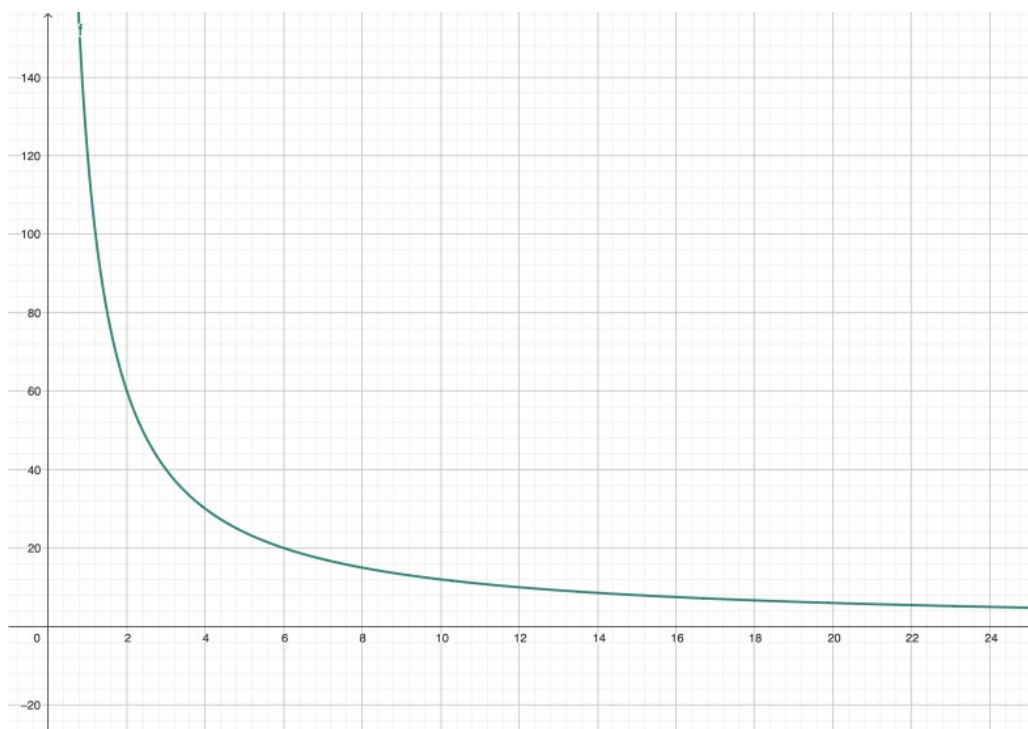
Задача. Двоє друзів вирішили взяти участь у марафоні з подолання відстані між двома містами, яка становить 120 км. Перший із них їде на електровелосипеді, а другий — на електросамокаті. Швидкість кожного залежить від часу t (у год) і визначається за формулою: $v(t) = \frac{120}{t}$.

- 1) Знайдіть обернену функцію, яка визначає швидкість руху залежно від часу.
- 2) Скільки часу потрібно велосипедисту, щоб подолати всю відстань, якщо він буде рухатись зі швидкістю 20 км/год?
- 3) Хто швидше дістанеться місця призначення, якщо друзі будуть рухатися з максимальними швидкостями?

Примітка. Максимальну швидкість електровелосипеда та електросамоката знайдіть із доступних джерел інформації.

Розв'язання. 1) З формули $v(t) = \frac{120}{t}$ виразимо t через v : $t(v) = \frac{120}{v}$.

Отримали функцію, обернену до даної. Побудуємо її графік:



2) Якщо велосипедист буде рухатись зі швидкістю 20 км/год, то на дорогу буде витрачено від 4-ох до 8-и годин (див. графік). Знайдемо точне значення: $t = 120 : 20 = 6$ (год).

3) Максимальна швидкість електровелосипеда становить в середньому 30 км/год, а електросамоката — 70 км/год. Тоді час, який необхідний велосипедисту, щоб подолати відстань між містами становить: $t_1 = 120 : 30 = 4$ (год).

Час, необхідний райдеру на подолання відстані, становить: $t_2 = 120 : 70 = 1,7$ (год).

Отже, райдер швидше подолає відстань марафону, якщо рухатиметься з максимально можливою швидкістю.

Відповідь. 1) $t(v) = \frac{120}{v}$; 2) 6 год; 3) райдер.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Функція $y = g(x)$ є оберненою до функції $y = f(x)$. Заповніть таблицю:

Властивість	$y = f(x)$	$y = g(x)$
Область визначення	$[-3; 3]$	
Множина значень	$[1; 5]$	
Монотонність функції	зростаюча	

2. Запишіть формулу функції, оберненою до функції 1) – 4). Укажіть область визначення і множину значень оберненої функції.

1) $y = 3x - 6$; 2) $y = -3x - 6$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = \sqrt{x}$.

3. Доведіть, що функції $f(x)$ і $g(x)$ — взаємно обернені:

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $g(x) = 3x - 1$;

2) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0; +\infty)$.

4. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 0,2x + 3$;

2) $y = \frac{1}{x-1}$;

3) $y = \frac{4}{x+2}$.

5. В одній системі координат побудуйте графік заданої функції та графік функції, оберненої до неї:

1) $y = 3x - 1$;

2) $y = x^2 - 4$, якщо $x \geq 0$.

6. Доведіть, що функція 1) – 4) не є оборотною:

1) $y = |x|$;

2) $y = \frac{1}{x^4}$;

3) $y = 5$;

4) $y = [x]$.

Рівень В

1. Запишіть формулу функції, обернену до функції 1) – 8). Побудуйте графік заданої функції, та графік функції, оберненої заданій.

1) $y = 2x - 2$;

2) $y = -0,5x + 1$;

3) $y = 0,5x - 1$;

4) $y = -2x + 2$;

5) $y = 2x$;

6) $y = x - 2$;

7) $y = -\frac{1}{x}$;

8) $y = \frac{1}{x-1}$.

2. В одній системі координат побудуйте графік функції 1) – 4) та графік функції, оберненої до неї. Укажіть область визначення та область значень оберненої функції.

1) $y = x^2$, $x \leq 0$;

2) $y = \frac{2}{x}$;

3) $y = x^2$, $x \geq 1$;

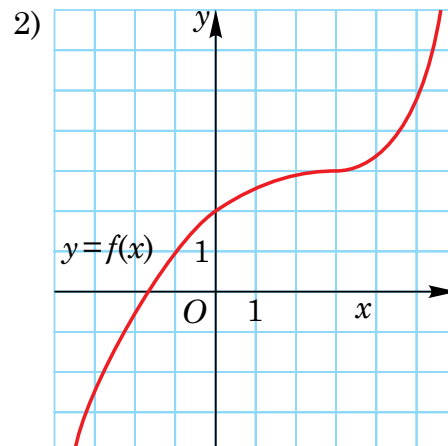
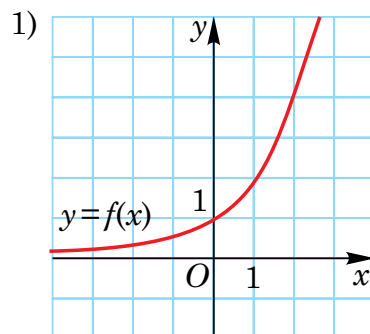
4) $y = -\frac{1}{x}$.

3. В одній системі координат побудуйте графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

1) $y = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 2x, & x < 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2}x, & x < 0. \end{cases}$

4. За графіком функції $y = f(x)$, зображеному на рисунку, побудуйте графік функції, оберненої до функції $f(x)$.



5. Задайте функцію, обернену до даної, та побудуйте її графік:

1) $f(x) = 4x - 3$;

2) $f(x) = 4 - x$;

3) $f(x) = \sqrt{x+5}$.

6. Задайте функцію, обернену до даної, та побудуйте її графік:

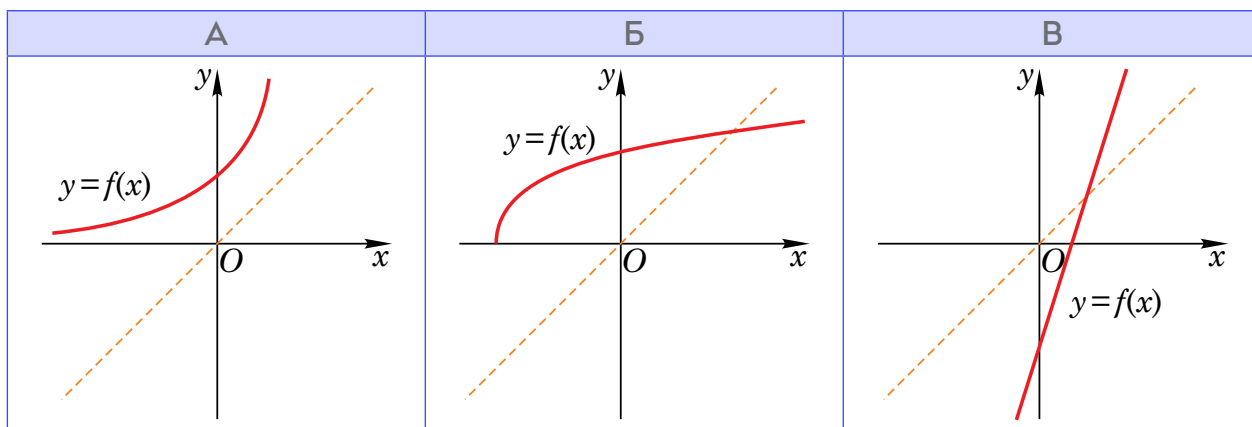
1) $y = \begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ 4x, & x > 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq -1, \\ x - 2, & x > -1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 0,5x + 1, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$

Рівень С

1. За графіком функцій $f(x)$, зображених на рисунку, побудуйте графік функції $g(x)$, яка обернена до функції $f(x)$.



2. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 2x + 4$;

2) $y = \frac{5}{x+2}$;

3) $y = 1 + \sqrt{x+3}$;

4) $y = x^2$, якщо $x \in [2; +\infty]$.

3. Доведіть, що функція $y = \frac{2x+3}{5x-2}$ збігається з оберненою до неї функцією.

4. Нехай функція $g(x)$ — обернена до функції $f(x) = x^3 + \sqrt{x-2}$.

1) Знайдіть $g(28)$.

2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = 1$.

3) Чи існує значення c таке, що рівняння $g(x) = c$ має два корені?

5. Доведіть, що функція, обернена до лінійної функції $y = kx + b$ при $k \neq 0$, також — лінійна.

6. Функція $g(x)$ є оберненою до функції $f(x) = x^3 + x + 12$. Розв'яжіть рівняння $g(x) = x^3 + x - 12$.

VIII. Рефлексія. «Пошук аналогій»

Знайдіть аналогії з життєвих ситуацій, які могли би сприяти розумінню оберненої функції. Наприклад, чи дія «повернення» може бути схожою на знаходження оберненої функції? Можна використати приклади з фізики, з економіки, з побуту.

Можливі теми проєктів

1. Історія розвитку вчення про обернені функції.

2. Застосування обернених функцій у фізиці та в економіці.

3. Числові методи для знаходження обернених функцій.

4. Побудова графіків функцій та їхніх обернених функцій. Симетрія графіків функцій.

Список використаних джерел

- 1) Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підручн. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : профільний рівень : підручн. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. — Харків : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.