

Урок 9. Урок–практикум. Розв’язування завдань з використанням обернених функцій

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Теорема про належність спільних точок взаємно обернених зростаючих функцій прямій $y = x$.
2. Розв’язування рівнянь на використання наслідку теореми про належність спільних точок взаємно обернених зростаючих функцій прямій $y = x$.
3. Розв’язування завдань на знаходження функцій, обернених до заданих.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв’язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв’язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

пов’язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв’язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв’язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (3–4 хв)

Мотиваційні запитання

1) Як переконатися, що дві функції — взаємно обернені? Що станеться, якщо помилково вважати дві функції взаємно оберненими?

2) Чому графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$? Як ця симетрія допомагає в побудові графіків функцій?

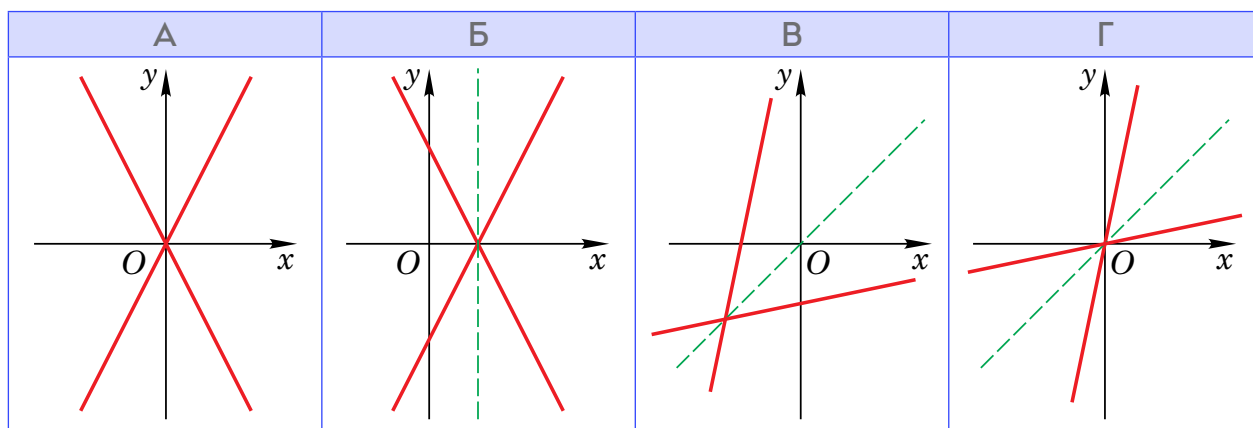
3) Як знання про спільні точки обернених функцій на прямій $y = x$ спрощує розв'язування складних рівнянь?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = 2x + 4$.

Відповідь. $y = 0,5x - 2$.

2. На якому рисунку зображено взаємно обернені функції?



Відповідь. В і Г.

3. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = x^2 - 2$, якщо $x \in [0; +\infty)$.

Відповідь. $y = \sqrt{x + 2}$.

4. Знайдіть обернену функцію до функції $y = \frac{3x}{x - 2}$.

Відповідь. $y = \frac{2x}{x - 3}$.

5. Перевірте, чи функції $f(x) = 3x - 4$ і $g(x) = \frac{x + 4}{3}$ — взаємно обернені.

Відповідь. Так.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У новій багатоповерхівці встановили «розумні» лічильники води. Щоб зменшити похибку під час передавання даних через сервер та унеможливити втручання в показники, виробник увів спеціальну систему перетворення даних. Лічильник не передає фактичний обсяг води, а перетворює його за формулою:

$W(V) = \frac{3V + 4}{2}$, де V — реальний обсяг води (у літрах), W — значення, яке передається та відображається у мобільному застосунку.

- 1) Запишіть правило, за яким можна знайти реальний обсяг води V , якщо відоме лише передане значення W .
- 2) Якщо у застосунку показано $W = 2000,5$, то, скільки літрів води (реальний обсяг V) використав мешканець?
- 3) Чи будуть ці дві функції взаємно оберненими? Поясніть графічно.

III. Теорема про належність спільних точок взаємно обернених зростаючих функцій прямій $y = x$

Теорема. Спільні точки графіків взаємно обернених зростаючих функцій лежать на прямій $y = x$.

Доведення. Нехай $M(a; b)$ — спільна точка графіків взаємно обернених зростаючих функцій $f(x)$ і $g(x)$. Доведемо, що $a = b$. Будемо міркувати від супротивного. Припустимо що $a < b$. Оскільки графіки взаємно обернених функцій $f(x)$ і $g(x)$ симетричні відносно прямої $y = x$, то точка $N(b; a)$ є для них спільною. З огляду на зростання функцій $f(x)$ можна записати: $f(a) < f(b)$. Але $f(a) = b$, $f(b) = a$. Отримали $b < a$, що суперечить припущенню $a < b$. Отже, $a = b$.

Варто зауважити, що умова зростання функцій є обов'язковою. Наприклад, функції $f(x) = -x$ і $g(x) = -x$ є взаємно оберненими, проте їхні спільні точки не належать прямій $y = x$.

Розглянемо наслідок з вище доведеної теореми.

Наслідок. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ взаємно обернені та зростаючі, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне кожному з рівнянь $f(x) = x$ або $g(x) = x$.

Ілюстративний приклад

- 6.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\sqrt{x} + 5} = x - 5$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\sqrt{x} = t$. Отримуємо: $\sqrt{t + 5} = t^2 - 5$.

Розглянемо функції $f(t) = \sqrt{t + 5}$ і $g(t) = t^2 - 5$, $D(g) = [0; +\infty)$. Ці функції є взаємно оберненими і зростаючими. Тоді з наслідку з теореми про належність спільних точок зростаючих взаємно обернених функцій прямій $y = x$ випливає, що рівняння

$$\sqrt{t + 5} = t^2 - 5 \text{ рівносильне системі } \begin{cases} t^2 - 5 = t, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } t = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}. \text{ Отже, } \sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, x = \frac{22 + 2\sqrt{21}}{4} = \frac{11 + \sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{11 + \sqrt{21}}{2}.$$

IV. Розв'язування завдань на знаходження функцій, обернених до заданих

У загальному випадку для функції $y = g(x)$, яка є оберненою до функції $y = f(x)$ справедливі твердження:

- 1) областю визначення оберненої функції $y = g(x)$ є область значень функції $y = f(x)$;
- 2) областю значень оберненої функції $y = g(x)$ є область визначення функції $y = f(x)$;
- 3) якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою, то й обернена до неї функція $y = g(x)$ є зростаючою;
- 4) якщо функція $y = f(x)$ є спадною, то й обернена до неї функція $y = g(x)$ є спадною;
- 4) графіки двох взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

Алгоритм знаходження оберненої функції

1. З формули $y = f(x)$ виразити змінну x через y і отримати формулу $x = g(y)$.
2. У одержаній формулі $x = g(y)$ букви x та y поміняти місцями: $y = g(x)$ — шукана формула для оберненої функції.

Ілюстративні приклади

7. Знайдіть функцію, обернену до функції $f(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{x}$.

Розв'язання. Замінімо $f(x)$ на y і розв'яжемо рівність відносно x :

$$y = 4\sqrt[3]{x}, \quad \frac{y}{4} = \sqrt[3]{x}, \quad \left(\frac{y}{4}\right)^3 = x.$$

Отже, функція обернена до початкової $g(x) = \frac{x^3}{64}$.

$$\text{Відповідь. } g(x) = \frac{x^3}{64}.$$

8. Знайдіть функцію, обернену до функції $g(x) = \frac{x-3}{x-2}$.

Розв'язання. Замінімо $g(x)$ на y і розв'яжемо рівність відносно x :

$$y = \frac{x-3}{x-2}, \quad y(x-2) = x-3, \quad yx - 2y = x-3,$$

$$yx - x = 2y - 3, \quad x(y-1) = 2y-3, \quad x = \frac{2y-3}{y-1}.$$

Отже, функція обернена до початкової $h(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

$$\text{Відповідь. } h(x) = \frac{2x-3}{x-1}.$$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У новій багатоповерхівці встановили «розумні» лічильники води. Щоб зменшити похибку під час передавання даних через сервер та унеможливити втручання в показники, виробник увів спеціальну систему перетворення даних. Лічильник не передає фактичний обсяг води, а перетворює його за формулою: $W(V) = \frac{3V + 4}{2}$, де V — реальний обсяг води (у літрах), W — значення, яке передається та відображається у мобільному застосунку.

- 1) Запишіть правило, за яким можна знайти реальний обсяг води V , якщо відоме лише передане значення W .
- 2) Якщо у застосунку показано $W = 2000,5$, то, скільки літрів води (реальний обсяг V) використав мешканець?
- 3) Чи будуть ці дві функції взаємно оберненими? Поясніть та доведіть це за допомогою міркувань про їхні графіки.

Розв'язання. 1) Оскільки $W(V) = \frac{3V + 4}{2}$, то розв'яжемо рівність відносно V :

$$2W = 3V + 4, 3V = 2W - 4, V = \frac{2W - 4}{3}.$$

Отже, обернена функція $V(W) = \frac{2W - 4}{3}$.

- 2) Якщо $W = 2000,5$, то знайдемо відповідне значення V .

$$V(2000,5) = \frac{2W - 4}{3} = \frac{2 \cdot 2000,5 - 4}{3} = \frac{3997}{3} \approx 1332,3 \text{ (л)}.$$

- 3) Побудуємо графіки функцій $W(x) = \frac{3x + 4}{2}$

та $V(x) = \frac{2x - 4}{3}$ в одній координатній площині.

Оскільки графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, тому функції $W(V)$ і $V(W)$ — взаємно обернені функції. Пряма $y = x$ — їхня вісь симетрії.

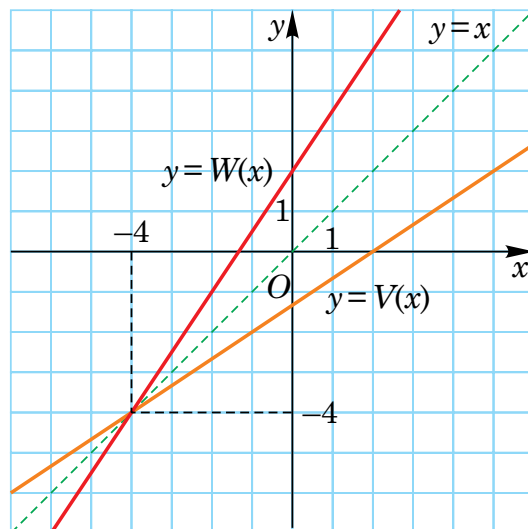
Знайдемо точку перетину графіків цих двох

функцій: $\frac{3x + 4}{2} = \frac{2x - 4}{3}, 9x + 12 = 4x - 8,$

$$5x = -20, x = -4.$$

Отже, точка $(-4; -4)$ — точка перетину графіків функцій. Оскільки ця точка належить прямій $y = x$, то функції $W(x)$ та $V(x)$ взаємно обернені.

Відповідь. 1) $V(W) = \frac{2W - 4}{3}$; 2) 1332,3 (л).



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть функцію, обернену до функції:
1) $f(x) = x + 3$; 2) $f(x) = x + 5$; 3) $f(x) = 2 - x$; 4) $f(x) = 3 - x$.
2. Знайдіть функцію, обернену до функції:
1) $f(x) = 7x - 9$; 2) $f(x) = 6x - 4$; 3) $f(x) = -5x + 2$; 4) $f(x) = 6x + 8$.
3. Функція $f(x)$ є оберненою до функції $g(x)$.
1) Якщо $g(6) = 7$, то $f(7) = \dots$; 2) якщо $g(3) = 2$, то $f(2) = \dots$;
3) якщо $g(4) = 5$, то $f(4) = \dots$; 4) якщо $g(-4) = -8$, то $f(-8) = \dots$.
4. Доведіть, що функції $f(x)$ і $g(x)$ є взаємно оберненими:
1) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$.
5. Знайдіть функцію, обернену до даної:
1) $y = \frac{x+2}{x}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
6. Побудуйте в одній системі координат графік функції та графік функції, оберненої до даної:
1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2}x, & x < 0. \end{cases}$
7. Знайдіть функцію, обернену до функції $f(x)$:
1) $f(x) = \frac{4x}{5-x}$; 2) $f(x) = \frac{1+2x}{7+x}$.
8. Визначте, яка з пар функцій є взаємно оберненими:
1) $f(x) = 8x$, $g(x) = \frac{8}{x}$; 2) $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$, $g(x) = \frac{3}{2}x + 3$;
3) $f(x) = 5x - 7$, $g(x) = \frac{x+5}{7}$; 4) $f(x) = 8x + 3$, $g(x) = \frac{x-3}{8}$.

Рівень В

1. Знайдіть функцію, обернену до функції:
1) $f(x) = x^2 - 4$; 2) $f(x) = x^2 + 11$;
3) $f(x) = x^2 - 8x + 2$, $x \leq 4$; 4) $f(x) = x^2 + 2x + 50$, $x \geq -1$.
2. Знайдіть функцію, обернену до функції:
1) $f(x) = \sqrt{x-1}$; 2) $f(x) = \sqrt{x+2}$; 3) $f(x) = \sqrt{x} + 9$; 4) $f(x) = \sqrt{x} - 1$.
3. Знайдіть область визначення, на якій функція $f(x)$ є зростаючою. Знайдіть обернену функцію до функції $f(x)$:
1) $f(x) = (x+7)^2$; 2) $f(x) = (x-6)^2$; 3) $f(x) = x^2 - 5$; 4) $f(x) = 3(x-4)^2 + 1$.
4. Доведіть, що функції $f(x)$ і $g(x)$ — взаємно обернені:
1) $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$;
2) $f(x) = (x-3)^2$, $D(f) = [3; +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$.

5. Знайдіть функцію, обернену до функції:

1) $f(x) = 5 - 9x$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}x + 7$; 3) $f(x) = (x - 2)^3$; 3) $f(x) = \sqrt[5]{2x + 11}$.

6. Визначте, яка з пар функцій — взаємно обернені:

1) $f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1, g(x) = \frac{1}{x} + 1, x \neq 0$; 2) $f(x) = -3x + 5, g(x) = \frac{x-5}{-3}$;

3) $f(x) = \frac{x}{2+x}, g(x) = \frac{2x}{1-x}$; 4) $f(x) = x^3 + 1, g(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

7. Визначте, яка з пар функцій — взаємно обернені:

1) $f(x) = x^2 + 2x + 1, x \geq -1, g(x) = -1 + \sqrt{x}, x \geq 0$;

2) $f(x) = \sqrt{4-x^2}, 0 \leq x \leq 2, g(x) = 4-x^2, 0 \leq x \leq 2$.

8. Знайдіть функцію, обернену до функції:

1) $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$; 2) $f(x) = \frac{2x-7}{x+6}$; 3) $f(x) = \frac{2x+3}{5x+4}$; 4) $f(x) = \frac{2x+6}{x-3}$.

Рівень С

1. Знайдіть функцію, обернену до функції:

1) $y = \sqrt{x^2 - 4}, D(y) = [2; +\infty)$; 2) $y = \begin{cases} 2-x^2, x \geq 1, \\ 2-x, x < 1. \end{cases}$

2. Функція $f(x)$ є оберненою до функції $g(x) = x^3 + x - 8$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$.

3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x - \frac{1}{8}} = x^2 + \frac{1}{8}$.

4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = x - 1$.

5. Знайдіть функцію $g(x)$, обернену до функції $f(x) = -x^2$, якщо $D(f) = [-3; 2) \cup [0; 1)$.

6. Чи існує оборотна функція $f(x)$ така, що $D(f) = N \cup \{0\}, E(f) = N$?

7. Чи існує оборотна функція $f(x)$ така, що $D(f) = Q, E(f) = N$?

8. Функція $f(x)$ має обернену функцію $g(x)$. Відомо, що нерівність $\frac{1}{2}x - 1 < f(x) < \frac{1}{2}x + 1$ виконується для всіх $x \in R$, а рівняння $g(x) = 10 - 2x^2$ має один додатний корінь. Знайдіть цей корінь наближено з абсолютною похибкою 0,25.

Примітка. Абсолютною похибкою називають модуль різниці між наближеним і точним значеннями величини.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-

3) У мене залишилися запитання щодо

.....

.....

Можливі теми проєктів

1. Методи знаходження оберненої функції: алгоритм, таблиця прикладів, аналіз області визначення.
2. Розв'язування рівнянь з використанням обернених функцій.
3. Симетрія графіків обернених функцій: побудова графіків у Desmos або GeoGebra і аналіз симетрії.
4. Практичні застосування обернених функцій у житті та в науці: кодування, моделі обчислень, фізика, економіка.

Список використаних джерел

1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл., профільний рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. – Харків: Гімназія, 2018. – 512 с.