

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 1. Означення та класифікація ірраціональних рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) познайомитеся з поняттям ірраціонального рівняння та його ОДЗ;
- 2) пригадаєте означення рівносильних рівнянь;
- 3) познайомитеся з ідеєю застосування рівняння-наслідку;
- 4) узнаєте схеми розв'язування найпростіших ірраціональних рівнянь;
- 6) познайомитеся з ідеєю застосування піднесення обох частин рівняння до степеня при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.

II. Повторення

1. Серед даних чисел оберіть ірраціональне число.

А	Б	В	Г	Д
0	1	-2,25	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{4}$

2. Число 2 є коренем рівняння:

А	Б	В	Г	Д
$2x^2 + x - 11 = 0$	$2x + 4 = 0$	$x^2 - 5x + 6 = 0$	$\frac{x^2 - 4}{2 - x} = 0$	$\sqrt{x - 3} = 2$

3. Укажіть значення виразу $16^{-\frac{3}{4}}$.

А	Б	В	Г	Д
-12	-8	8	0,125	інша відповідь

4. Знайдіть ОДЗ виразу $\sqrt{7-2x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3,5]$	$(-\infty; 3,5)$	$[0; +\infty)$	$x \neq 0$	$[3,5; +\infty)$

5. Оберіть рівняння, яке не має дійсних коренів.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{x} = -2$	$\sqrt{x} = 2$	$x^{\frac{2}{3}} = 1$	$\frac{2x-1}{2x-1} = 1$	$\sqrt{x} = -1$

III. Означення ірраціонального рівняння

Ви знаєте вже важливі типи рівнянь, які часто використовуються в математиці та прикладних ситуаціях і мають відомі алгоритми для розв'язання: лінійні, квадратні, дробово-раціональні. У всіх цих рівняннях змінна підносилася до цілого степеня. Розглянемо важливий тип рівнянь, для якого така властивість не виконується.

Означення. Ірраціональними називають рівняння, в яких невідома величина (змінна) знаходиться під знаком кореня або невідома величина підноситься до степеня з дробовим показником.

Так само, як і для дробово-раціональних рівнянь, важливу роль при розв’язуванні ірраціональних рівнянь відіграє *ОДЗ (область допустимих значень)* – множина значень змінної, при яких обидві частини рівняння мають сенс, тобто всі дії в них можна коректно виконати.

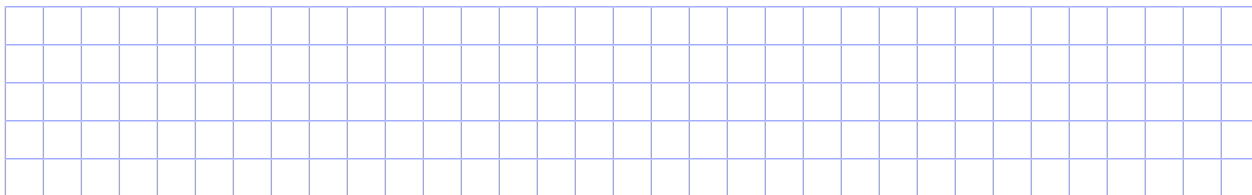
Для коренів парного степеня підкореневі вирази мають бути невід’ємними.

Як і при розв’язанні інших типів рівнянь, часто потрібно виконати деякі алгебричні перетворення. При цьому можуть виникати рівняння двох типів: *рівносильні рівняння* (мають таку саму множину розв’язків, як і початкове рівняння) і *рівняння-наслідки* (множина їхніх розв’язків складається з усіх коренів початкового рівняння і деяких інших чисел – *сторонніх коренів*). Сторонні корені рівняння можна відкинути перевіркою – підстановкою цих чисел замість змінної у початкове рівняння. Зайвих перетворень часто можна уникнути, якщо крім ОДЗ рівняння звертати увагу на множину значень відомих функцій.

Приклад 1. Знайдіть область допустимих значень ірраціонального рівняння:

$$\text{a) } \sqrt{x-3} + \sqrt{4-x} = 5; \quad \text{б) } \sqrt[3]{x-3} - \sqrt[5]{4-x} = \sqrt{2}; \quad \text{в) } x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} = 3,75.$$

[illegible]

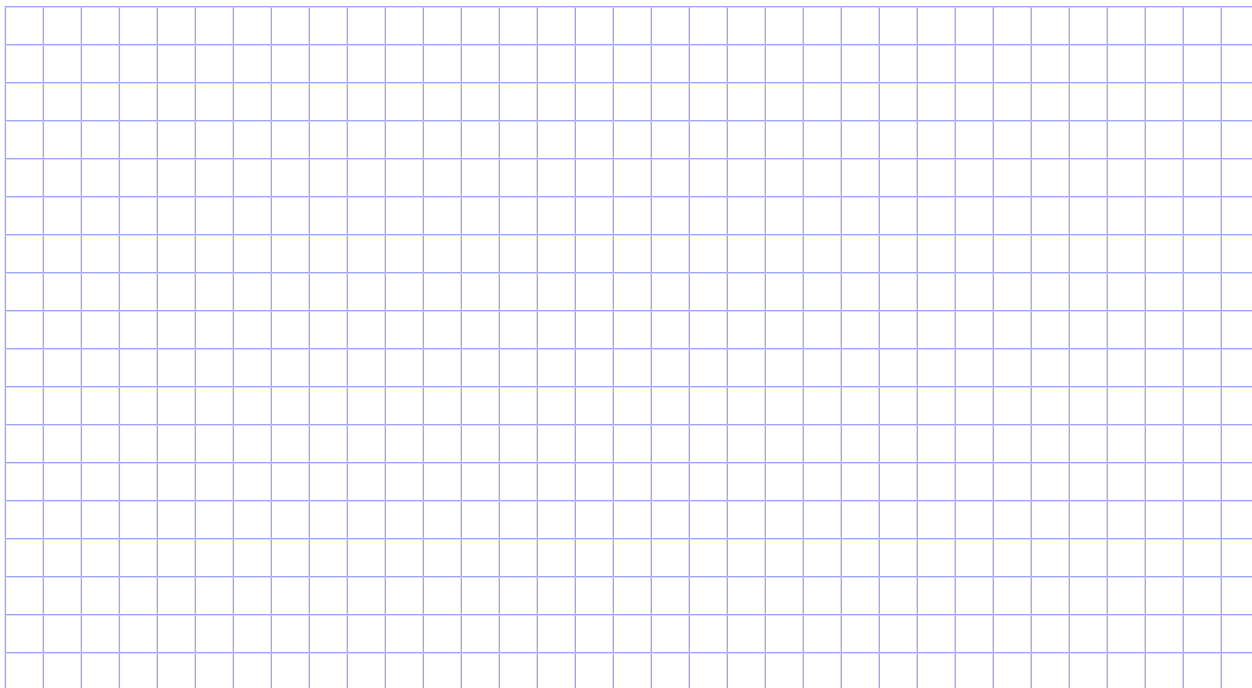


Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-3} = 5$;

б) $(x^2 - 6x + 5) \cdot \sqrt{x-2} = 0$;

в) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+5} = 6$.



IV. Види ірраціональних рівнянь

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь використовують як рівносильні перетворення, що призводять до рівносильних рівнянь, так і перетворення, що призводять до рівнянь-наслідків. Але метою всіх цих перетворень, у будь-якому випадку, є зведення даного рівняння до одного з найпростіших видів. А для них знаходження коренів є доволі простим.

<i>Найпростіші ірраціональні рівняння</i>		
Вид рівняння	Рівносильна умова	Приклад
$\sqrt[n]{f(x)} = a, a \geq 0, n$ — парне	$f(x) = a^n$	$\sqrt{x^2 - 5x + 10} = 2$, $x^2 - 5x + 10 = 4$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x = 2, x = 3$.
$\sqrt[n]{f(x)} = a, a < 0, n$ — парне	$\emptyset$	$\sqrt{x^2 - 5x + 7} = -2$. Немає розв'язків.
$\sqrt[n]{f(x)} = a, n$ — непарне	$f(x) = a^n$	$\sqrt[3]{7x-1} = -2$, $7x-1 = -8$, $7x = -7$, $x = -1$.

<i>Найпростіші ірраціональні рівняння</i>		
Вид рівняння	Рівносильна умова	Приклад
$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, n — парне	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x - 4}, \\ x^2 - 5x + 1 = x - 4, \\ x - 4 \geq 0; \\ x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x \geq 4; \\ \begin{cases} x = 5, \\ x = 1, \Leftrightarrow x = 5 \end{cases} \\ x \geq 4. \end{cases}$
$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, n — непарне	$f(x) = g(x)$	$\begin{cases} \sqrt[3]{2x - 3} = \sqrt[3]{x + 1}, \\ 2x - 3 = x + 1, \\ x = 4. \end{cases}$

V. Теорема про піднесення обох частин рівняння до непарного та парного степенів

При виконанні перетворень, що спрощують вид ірраціонального рівняння, найчастіше зустрічаються піднесення обох частин рівняння до однакового степеня. Важливо слідкувати за тим, коли це є рівносильним перетворенням (призводить до рівносильного рівняння, отримані корені не потребують перевірки), а коли – ні (отримаємо рівняння-наслідок, його корені потребують перевірки підстановкою до початкового рівняння).

Теорема 1. При піднесенні обох частин рівняння до одного й того самого непарного натурального степеня отримаємо рівносильне рівняння.

Теорема 2. При піднесенні обох частин рівняння до одного й того самого парного натурального степеня отримаємо (у загальному випадку) рівняння-наслідок.

Доведення теореми 1 ґрунтується на тому, що степенева функція при непарному натуральному показнику є зростаючою. Тому рівність аргументів рівносильна до рівності відповідних значень функцій, тобто: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^n(x) = g^n(x)$ при непарному натуральному значенні n .

Доведення теореми 2 відрізняється від доведення теореми 1, оскільки степенева функція при парному натуральному показнику не є зростаючою на множині дійсних чисел. Тому рівність аргументів призводить до рівності відповідних значень функцій, тобто: $f(x) = g(x) \Rightarrow f^n(x) = g^n(x)$ при парному натуральному значенні n . Але навпаки, взагалі кажучи, це неправильно. Наприклад, при деякому значенні аргументу може бути так, що $f(x) = -g(x)$, але $f^n(x) = g^n(x)$ при парному натуральному значенні n .

5. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x}$; б) $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{6 - 3x}$; в) $\sqrt{x^2 + x - 3} = \sqrt{1 - 2x}$.

6. Доведіть, що рівняння не має дійсних коренів:

а) $\sqrt{x^2 - x - 6} = -6$; б) $\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{6 - 3x} = -2$; в) $\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 3} = 6$.

Рівень В

1. Знайдіть ОДЗ рівняння:

а) $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 5$; б) $\frac{2-x}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{5-x} = -\sqrt{3}$; в) $\frac{4-x}{\sqrt{x-4}} + \sqrt[3]{2-x} = 5$.

2. Установіть, чи є рівносильними рівняння:

а) $\sqrt{x-5} = 9$ і $x+2 = 88$; б) $\sqrt[4]{2-x} = -1$ і $2-x = 1$; в) $\sqrt{x+6} = x$ і $x+6 = x^2$.

3. Доведіть, що рівняння не має дійсних коренів:

а) $\sqrt{3x-1} + \sqrt{5x+3} + 4 = 0$; б) $\sqrt{x-8} + 3 = \sqrt{7-x}$; в) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{5x-5} = 2$.

4. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{14+|x|} = \sqrt{x^2-16}$; б) $\sqrt{x+1} = \frac{|x|}{x} + 1$; в) $\sqrt[4]{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{2}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{x}}} = 1$; б) $\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} = \sqrt[3]{x^3+2x^2-x+2}$;
в) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+x+1} = x+1$.

6. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+5} = x$; б) $(x-5) \cdot \sqrt{x^2-10x+24} = 0$; в) $\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x^2+5x+6} = 0$.

7. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+6} = 4$; б) $\sqrt{2x+6} + \sqrt{4+x} = 7$; в) $\sqrt{2x^2+8x+7} = x+2$.

8. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4}$; б) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{4+x} = 1$;
в) $\sqrt{3x+12} - \sqrt{x+1} = \sqrt{4x+13}$.

9. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt[3]{x-10} + \sqrt[3]{x-17} = 3$; б) $\sqrt[3]{4x+3} - \sqrt[3]{x+2} = 1$; в) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$.

10. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-2} - \sqrt{7x-x^2-12} = 2x+1$; б) $\sqrt{x-2} - \sqrt{2-x} = x^2-5x+6$;
в) $\sqrt{x^2-5x+6} - \sqrt{4x-x^2-4} = \sqrt{4x+13}$.

11. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x-1)^{\frac{5}{6}} = 32$; б) $(2-x)^{-\frac{2}{3}} = 25$; в) $(x^2-5x+5)^{\frac{1}{3}} = -1$.

12. Розв'яжіть рівняння з параметром a :

а) $\sqrt{x-4} = \sqrt{2x-a}$; б) $\sqrt{5-x} = a-2$; в) $\frac{\sqrt{x-1}-a}{5-x} = 0$.

Рівень С

1. Знайдіть ОДЗ рівняння $\sqrt{x^2 - 21x + 98} - \sqrt{x^2 - 16x + 63} = \sqrt{x^2 - 13x + 42}$ та множину його розв'язків.
2. Розв'яжіть рівняння, знайшовши попередньо найбільше або найменше значення для обох частин рівняння:
 - а) $\sqrt{x^2 + 2x + 5} = x^4 + 3$; б) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{4 + x^2} = 4$; в) $2 - \sqrt{x^2 - 1} = x + \frac{1}{x}$.
3. Розв'яжіть рівняння з використанням властивостей монотонних функцій:
 - а) $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x + 11} = 7$; б) $\sqrt{11 - x} + \sqrt{10 - 3x} = 5$; в) $\sqrt{12 + x} + \sqrt{21 + x} = 13 - x$.
4. Розв'яжіть рівняння:
 - а) $\sqrt{(x - 1)^2} + \sqrt{(x + 2)^2} = 3$; б) $\sqrt[4]{(2 - x)^4} + \sqrt[4]{(2 + x)^4} = 4$; в) $\sqrt[6]{(x - 3)^6} - \sqrt[6]{(2 + x)^6} = 5$.
5. Розв'яжіть рівняння з параметром a :
 - а) $\sqrt{x - 4} \cdot \sqrt{x - a} = 0$; б) $\frac{\sqrt{x - a}}{\sqrt{x - 1}} = 0$; в) $a^2 \sqrt{x - 5} + \sqrt{x - 2} = 0$.
6. Розв'яжіть рівняння:
 - а) $\sqrt[3]{x + 7} = \sqrt{x + 3}$; б) $\sqrt{5 - \sqrt{x + 1} + \sqrt{2x^2 + x + 3}} = 1$;
 - в) $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$.

Рефлексія

- | | | | | |
|----|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я знаю означення ірраціонального рівняння. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію знаходити ОДЗ ірраціонального рівняння. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю схему розв'язання найпростіших видів ірраціональних рівнянь. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю означення рівносильних рівнянь. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, що таке рівняння-наслідок та сторонній корінь рівняння. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію застосування теорем про піднесення обох частин рівняння до натурального степеня. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Геометричні задачі, що призводять до ірраціональних рівнянь.
2. Використання монотонності функцій при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.
3. Використання області визначення та множини значень функції при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.
4. Використання нерівностей при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.
5. Використання графіків функцій при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.

