

10

Тема 3.

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 10. Урок–практикум. Розв'язування ірраціональних нерівностей

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте схеми розв'язування ірраціональних нерівностей;
- 2) закріпите вміння та навички розв'язання ірраціональних нерівностей;
- 3) застосуєте заміну змінної при розв'язанні ірраціональних нерівностей;
- 4) застосуєте теорему про піднесення до квадрата нерівності з невід'ємними лівою та правою частинами;
- 5) застосуєте набуті знання, вміння та навички для розв'язання геометричної задачі методами алгебри.

II. Перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки та обговорення

1. Розв'яжіть ірраціональну нерівність $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 34}} < x$.
Коротке розв'язання. Використаємо переходи до рівносильних систем та сукупностей, відповідно до схеми розв'язування стандартних ірраціональних нерівностей.

$$\sqrt{1+x\sqrt{x^2-34}} < x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x\sqrt{x^2-34} < (x-1)^2, \\ 1+x\sqrt{x^2-34} \geq 0, \\ x-1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x\sqrt{x^2-34} < x^2-2x+1, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-34} < x-2, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-34 < (x-2)^2, \\ x \geq 1, \\ x \geq 2, \\ x^2-34 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-34 < x^2-4x+4, \\ x \geq \sqrt{34}; \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{34} \leq x < 9,5.$$

При рівносильних переходах врахована додатність змінної x , яка впливає з нерівності $x-1 \geq 0$.

Відповідь. $x \in [\sqrt{34}; 9,5)$.

- 2.** Доведіть, що нерівність $\sqrt{3x-1} + \sqrt{5x+3} \leq 1$ не має розв'язків у дійсних числах.

Вказівка. Урахувавши обмеження для ОДЗ, маємо: $x \geq \frac{1}{3}$. Тоді перший доданок у лівій частині нерівності є невід'ємним, а другий — більшим за 2. Тоді їхня сума завжди буде більша за 1.

- 3.** Використовуючи зростання функції $y = x^3$ на всій області визначення, розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}}} > 1$.

Коротке розв'язання. Оскільки функція $y = x^3$ є зростаючою на всій множині дійсних чисел, то нерівності $f(x) > g(x)$ та $(f(x))^3 > (g(x))^3$ є рівносильними. Отже, маємо: $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}}} > 1 \Leftrightarrow 3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}} > 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}} > -2 \Leftrightarrow 3 + \sqrt[3]{x} > -8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > -11$. Знову підносимо обидві частини останньої нерівності до куба.

Відповідь. $x \in (-1331; +\infty)$.

- 4.** Розв'яжіть нерівність з використанням властивостей монотонних функцій: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} \geq 7$.

Коротке розв'язання. Помічаємо, що функція $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{x+11}$ є зростаючою на всій області визначення. Крім того, $y(5) = \sqrt{5+4} + \sqrt{5+11} = 3+4 = 7$. Звідси отримуємо, що $y(x) \geq 7 \Leftrightarrow x \geq 5$.

- 5.** Спростіть ліву частину та розв'яжіть нерівність $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} \geq 3$.

Коротке розв'язання. Після виконання рівносильних перетворень отримуємо:

$$\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} \geq 3 \Leftrightarrow |x-1| + |x+2| \geq 3.$$

Нерівності такого вигляду нескладно розв'язати за допомогою метода інтервалів для рівнянь та нерівностей, що містять знак модуля. Але у даному випадку зручніше скористатися наслідком із нерівності трикутника для чисел: $|a| + |b| \geq |a-b|$.

Звідси: $|x-1| + |x+2| \geq |x-1-(x+2)| = |-3| = 3$.

Отже, дана в умові нерівність справджується при будь-яких дійсних значеннях змінної x .

III. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних нерівностей з використанням теорем про рівносильність

<i>Ірраціональні нерівності та рівносильні умови</i>		
Вид нерівності	Рівносильна система (сукупність)	Приклад
$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3} \leq \sqrt{2 - x} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \leq 2 - x, \\ x^2 - 3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$
$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3} \leq x - 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \leq (x - 1)^2, \\ x^2 - 3 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$
$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$	$\begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3} \geq x - 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 3 \geq (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3 \geq 0, \\ x - 1 < 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$

Завдання для роботи в парах

- Розв'яжіть нерівність простого вигляду: $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \leq \sqrt{10}$.
- Перейдіть до рівносильної системи та розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 3x} > \sqrt{x + 5}$.
- Перейдіть до рівносильної системи та розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - x - 2} < x + 4$.
- Перейдіть до рівносильної сукупності та розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$.
- Використайте заміну змінної та розв'яжіть нерівність $x^2 - 5x - \sqrt{x^2 - 5x} > 2$.

IV. Робота в малих групах над розв'язуванням ірраціональних нерівностей з використанням теореми про невід'ємність обох частин нерівності

Завдання для роботи в малих групах

- Заповніть пропуски у розв'язанні нерівності та знайдіть множину її розв'язків:
 $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 1} < \sqrt{x + 6}$.

Розв'язання. Запишемо систему, рівносильну до даної нерівності, і розв'яжемо її:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} < \sqrt{x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2+x+1+2\sqrt{(x-2)(x+1)} < x+6, \\ x-2 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ x+6 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(x-2)(x+1)} < \dots\dots\dots, \\ x \geq \dots\dots\dots \end{cases}$$

Розв'язуємо першу нерівність системи відповідно до схеми у ситуації $\sqrt{f(x)} < g(x)$ і отримуємо:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots < \dots\dots\dots, \\ x \geq \dots\dots\dots; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \dots\dots\dots, \\ x \geq \dots\dots\dots; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \dots\dots\dots$$

Відповідь. $[2; 3)$.

- 7.** Розв'яжіть нерівність з використанням теореми про невід'ємність обох частин нерівності: $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x+5}$.
- 8.** Доведіть, що нерівність $\sqrt{x-3} - \sqrt{x-5} \geq \sqrt{x-2}$ не виконується при жодному значенні змінної x .

V. Самостійна робота

- 9.** Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною розв'язків (А–Д) нерівності.

Нерівність

1 $\sqrt{x+3} > \sqrt{1-x}$

2 $\sqrt{x+2} > x$

3 $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} \leq 3$

Множина розв'язків нерівності

А $[6; 10]$

Б $[-2; 2)$

В $(-1; 1]$

Г $[0; 2)$

Д $[5; 6] \cup [6; 10]$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

VI. Розв'язання геометричної задачі

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** Дві сторони трикутника дорівнюють 17 см та 10 см. При яких значеннях висоти, проведеної до третьої сторони, величина третьої сторони буде не меншою від 21 см?

Рефлексія

Позначте на числовій прямій свої успіхи в розв'язанні завдань сьогоднішнього уроку від 0 балів до 10 балів.



1) Що нового я сьогодні дізнався/дізналася?

.....
.....
.....

2) Чи зрозумів/зрозуміла я методи розв'язання ірраціональних нерівностей? Якщо ні, то що залишилося незрозумілим?

.....
.....
.....

3) Які помилки я допустив/допустила під час роботи? Як їх виправити в майбутньому?

.....
.....
.....

4) Які поради я можу запропонувати для однокласників/однокласниць, щоб ефективніше розв'язувати ірраціональні нерівності?

.....
.....
.....

5) Як я можу застосувати знання про ірраціональні нерівності у практичних потребах?

.....
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq h(x)$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15} \leq 5; \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-x^2} \leq 2; \sqrt{4x^2+x+9} + \sqrt{4x^2+x} \leq 3.$$

Для яких прикладів запропонований алгоритм є ефективним, а для яких — ні?
Які альтернативні варіанти розв'язання ви можете запропонувати?

2. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq h(x)$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+16} \geq 5; \sqrt{x+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{x+\frac{1}{x^2}} \geq \frac{2}{x}; \sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-x+14} \geq 6.$$

Для яких прикладів запропонований алгоритм є ефективним, а для яких — ні?
Які альтернативні варіанти розв'язання ви можете запропонувати?

3. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq \sqrt{h(x)}$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:

$$2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} \leq \sqrt{x+21}; \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} \leq \sqrt{x-3}; \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x+3}.$$

Для яких прикладів запропонований алгоритм є ефективним, а для яких — ні?
Які альтернативні варіанти розв'язання ви можете запропонувати?

- 4.** Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{h(x)}$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:

$$2\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} \geq \sqrt{x+23}; \quad \sqrt{x+8} + \sqrt{x+5} \geq \sqrt{x+7}; \quad \sqrt{2x+5} + \sqrt{x+2} \geq \sqrt{x+6}.$$

Для яких прикладів запропонований алгоритм є ефективним, а для яких — ні?
Які альтернативні варіанти розв'язання ви можете запропонувати?

- 5.** Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{h(x)}$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} \geq \sqrt{x}; \quad \sqrt{3+x} - \sqrt{x-1} \geq \sqrt{x-2}; \quad \sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+4}.$$

Для яких прикладів запропонований алгоритм є ефективним, а для яких — ні?
Які альтернативні варіанти розв'язання ви можете запропонувати?







