

10

Тема 3.

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 10. Урок–практикум. Розв'язування ірраціональних нерівностей

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Перевірка домашнього завдання.
2. Застосування умінь і навичок. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних нерівностей з використанням теорем про рівносильність.
3. Застосування умінь і навичок. Робота в малих групах над розв'язуванням ірраціональних нерівностей з використанням теореми про невід'ємність обох частин нерівності.
4. Самостійна робота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку – закріплення умінь та навичок щодо розв'язування типових ірраціональних нерівностей.

2) Додаткова мета уроку – формування умінь розв’язувати більш складні ірраціональні нерівності через застосування рівносильного переходу до системи або сукупності простіших нерівностей.

3) Важливо постійно акцентувати увагу при розв’язанні нерівностей на використання та зміст понять ОДЗ, рівносильні перетворення, рівносильні системи.

4) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

5) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.

6) Сформулюйте геометричну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

8) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Дві сторони трикутника дорівнюють 17 см та 10 см. При яких значеннях висоти, проведеної до третьої сторони, величина третьої сторони буде не меншою від 21 см?

I. Перевірка домашнього завдання

На початку уроку запропонуйте учням/ученицям перевірити відповіді та ідеї розв’язання до деяких номерів домашнього завдання. За необхідності, використайте опитування біля дошки або інші форми роботи.

Завдання для перевірки та обговорення

1. Розв’яжіть ірраціональну нерівність $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 34}} < x$.

Коротке розв’язання. Використаємо переходи до рівносильних систем та сукупностей, відповідно до схеми розв’язування стандартних ірраціональних нерівностей.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 34}} < x - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x\sqrt{x^2 - 34} < (x - 1)^2, \\ 1 + x\sqrt{x^2 - 34} \geq 0, \\ x - 1 \geq 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x\sqrt{x^2 - 34} < x^2 - 2x + 1, \\ x \geq 1; \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 34} < x - 2, \\ x \geq 1; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 34 < (x - 2)^2, \\ x \geq 1, \\ x \geq 2, \\ x^2 - 34 \geq 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 34 < x^2 - 4x + 4, \\ x \geq \sqrt{34}; \end{cases} &\Leftrightarrow \sqrt{34} \leq x < 9,5. \end{aligned}$$

При рівносілних переходах врахована додатність змінної x , яка впливає з нерівності $x - 1 \geq 0$.

Відповідь. $x \in [\sqrt{34}; 9,5)$.

- 2.** Доведіть, що нерівність $\sqrt{3x-1} + \sqrt{5x+3} \leq 1$ не має розв'язків у дійсних числах.

Вказівка. Урахувавши обмеження для ОДЗ, маємо: $x \geq \frac{1}{3}$. Тоді перший доданок у лівій частині нерівності є невід'ємним, а другий — більшим за 2. Тоді їхня сума завжди буде більша за 1.

- 3.** Використовуючи зростання функції $y = x^3$ на всій області визначення, розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}}} > 1$.

Коротке розв'язання. Оскільки функція $y = x^3$ є зростаючою на всій множині дійсних чисел, то нерівності $f(x) > g(x)$ та $(f(x))^3 > (g(x))^3$ є рівносілними. Отже,

маємо: $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}}} > 1 \Leftrightarrow 3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}} > 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}} > -2 \Leftrightarrow 3 + \sqrt[3]{x} > -8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > -11$.

Знову підносимо обидві частини останньої нерівності до куба.

Відповідь. $x \in (-1331; +\infty)$.

- 4.** Розв'яжіть нерівність з використанням властивостей монотонних функцій: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} \geq 7$.

Коротке розв'язання. Помічаємо, що функція $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{x+11}$ є зростаючою на всій області визначення. Крім того, $y(5) = \sqrt{5+4} + \sqrt{5+11} = 3 + 4 = 7$. Звідси отримуємо, що $y(x) \geq 7 \Leftrightarrow x \geq 5$.

- 5.** Спростіть ліву частину та розв'яжіть нерівність $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} \geq 3$.

Коротке розв'язання. Після виконання рівносілних перетворень отримуємо:

$$\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} \geq 3 \Leftrightarrow |x-1| + |x+2| \geq 3.$$

Нерівності такого вигляду нескладно розв'язати за допомогою метода інтервалів для рівнянь та нерівностей, що містять знак модуля. Але у даному випадку зручніше скористатися наслідком із нерівності трикутника для чисел: $|a| + |b| \geq |a - b|$.

Звідси: $|x-1| + |x+2| \geq |x-1 - (x+2)| = |-3| = 3$.

Отже, дана в умові нерівність справджується при будь-яких дійсних значеннях змінної x .

II. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних нерівностей з використанням теорем про рівносильність

<i>Ірраціональні нерівності та рівносильні умови</i>		
Вид нерівності	Рівносильна система (сукупність)	Приклад
$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3} \leq \sqrt{2 - x} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \leq 2 - x, \\ x^2 - 3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$
$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3} \leq x - 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \leq (x - 1)^2, \\ x^2 - 3 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$
$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3} \geq x - 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \geq (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 - 3 \geq 0, \\ x - 1 < 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$

Завдання для роботи в парах

1. Розв'яжіть нерівність простого вигляду: $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \leq \sqrt{10}$.
2. Перейдіть до рівносильної системи та розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 3x} > \sqrt{x + 5}$.
3. Перейдіть до рівносильної системи та розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - x - 2} < x + 4$.
4. Перейдіть до рівносильної сукупності та розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$.
5. Використайте заміну змінної та розв'яжіть нерівність $x^2 - 5x - \sqrt{x^2 - 5x} > 2$.

III. Робота в малих групах над розв'язуванням ірраціональних нерівностей з використанням теореми про невід'ємність обох частин нерівності

- 1) Об'єднуємо клас у кілька груп (4 – 6 груп).
- 2) Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті на різних уроках знання;
- 3) Один або декілька учнів/учениць можуть допомагати вчителю виконувати роль радника та консультанта.

Завдання для роботи в малих групах

- 6.** Заповніть пропуски у розв'язанні нерівності та знайдіть множину її розв'язків:
 $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} < \sqrt{x+6}$.

Розв'язання. Запишемо систему, рівносильну до даної нерівності, і розв'яжемо її:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} < \sqrt{x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2+x+1+2\sqrt{(x-2)(x+1)} < x+6, \\ x-2 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ x+6 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(x-2)(x+1)} < \dots\dots\dots, \\ x \geq \dots\dots\dots \end{cases}$$

Розв'язуємо першу нерівність системи відповідно до схеми у ситуації $\sqrt{f(x)} < g(x)$ і отримуємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots < \dots\dots\dots, \\ x \geq \dots\dots; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \dots\dots\dots, \\ x \geq \dots\dots; \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \dots\dots\dots$$

Відповідь. $[2; 3)$.

7. Розв'яжіть нерівність з використанням теореми про невід'ємність обох частин нерівності: $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x+5}$.
8. Доведіть, що нерівність $\sqrt{x-3} - \sqrt{x-5} \geq \sqrt{x-2}$ не виконується при жодному значенні змінної x .

IV. Самостійна робота

9. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною розв’язків (А–Д) нерівності.

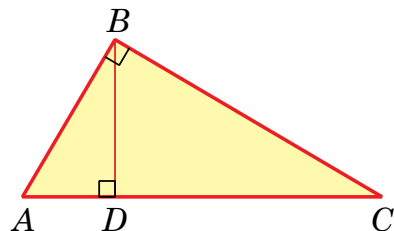
Нерівність	Множина розв'язків нерівності	А	Б	В	Г	Д
1 $\sqrt{x+3} > \sqrt{1-x}$	А $[6; 10]$	☐	☐	☐	☐	☐
2 $\sqrt{x+2} > x$	Б $[-2; 2)$	☐	☐	☐	☐	☐
3 $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} \leq 3$	В $(-1; 1]$	☐	☐	☐	☐	☐
	Г $[0; 2)$					
	Д $[5; 6] \cup [6; 10]$					

V. Розв'язання геометричної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Дві сторони трикутника дорівнюють 17 см та 10 см. При яких значеннях висоти, проведеної до третьої сторони, величина третьої сторони буде не меншою від 21 см?

Розв'язання. Зробимо рисунок відповідно до умови і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього. Зауважимо, що проти більшої сторони AC буде лежати найбільший кут, а тому кути при вершинах A і C є гострими. Отже, висота BD лежить усередині трикутника.



Нехай $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, $BD = x$ (см). Тоді, за теоремою Піфагора, у трикутниках ABD та CBD маємо: $AD = \sqrt{10^2 - x^2}$, $CD = \sqrt{17^2 - x^2}$.

Запишемо нерівність у відповідності до умови задачі:

$$\sqrt{10^2 - x^2} + \sqrt{17^2 - x^2} \geq 21.$$

Урахуємо, що x є додатним числом. Тоді, використовуючи ОДЗ отриманої нерівності, маємо рівносильну систему:

$$\sqrt{10^2 - x^2} + \sqrt{17^2 - x^2} \geq 21 \Leftrightarrow \begin{cases} 10^2 - x^2 + 17^2 - x^2 + 2\sqrt{(10^2 - x^2)(17^2 - x^2)} \geq 21^2, \\ x \in (0; 10]. \end{cases}$$

Зробимо заміну змінної $y = x^2$. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} \sqrt{(100 - y)(289 - y)} \geq 26 + y, \\ y \in (0; 100]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (100 - y)(289 - y) \geq (26 + y)^2, \\ y \in (0; 100]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28900 - 389y \geq 676 + 52y, \\ y \in (0; 100]. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що $y \in (0; 64]$, а висота, проведена до третьої сторони, має бути не більшою за 8 см.

Відповідь. Не більшою за 8 см.

Зауваження. Нерівність $\sqrt{10^2 - x^2} + \sqrt{17^2 - x^2} \geq 21$ можна було розв'язувати, виходячи зі спадання функції $f(x) = \sqrt{10^2 - x^2} + \sqrt{17^2 - x^2}$ на множині $(0; 10]$, причому $f(8) = 21$.

VI. Рефлексія (1–2 хв)

Позначте на числовій прямій свої успіхи в розв'язанні завдань сьогоднішнього уроку від 0 балів до 10 балів.



1) Що нового я сьогодні дізнався/дізналася?

.....

2) Чи зрозумів/зрозуміла я методи розв'язання ірраціональних нерівностей? Якщо ні, то що залишилося незрозумілим?

.....

3) Які помилки я допустив/допустила під час роботи? Як їх виправити в майбутньому?

.....

4) Які поради я можу запропонувати для однокласників/однокласниць, щоб ефективніше розв'язувати ірраціональні нерівності?

.....
.....
.....

5) Як я можу застосувати знання про ірраціональні нерівності у практичних потребах?

.....
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq h(x)$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15} \leq 5; \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-x^2} \leq 2; \sqrt{4x^2+x+9} + \sqrt{4x^2+x} \leq 3.$$

Для яких прикладів запропонований алгоритм є ефективним, а для яких — ні? Які альтернативні варіанти розв'язання ви можете запропонувати?

2. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq h(x)$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+16} \geq 5; \sqrt{x+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{x+\frac{1}{x^2}} \geq \frac{2}{x}; \sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-x+14} \geq 6.$$

Для яких прикладів запропонований алгоритм є ефективним, а для яких — ні? Які альтернативні варіанти розв'язання ви можете запропонувати?

3. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq \sqrt{h(x)}$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:

$$2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} \leq \sqrt{x+21}; \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} \leq \sqrt{x-3}; \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x+3}.$$

Для яких прикладів запропонований алгоритм є ефективним, а для яких — ні? Які альтернативні варіанти розв'язання ви можете запропонувати?

4. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{h(x)}$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:

$$2\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} \geq \sqrt{x+23}; \sqrt{x+8} + \sqrt{x+5} \geq \sqrt{x+7}; \sqrt{2x+5} + \sqrt{x+2} \geq \sqrt{x+6}.$$

Для яких прикладів запропонований алгоритм є ефективним, а для яких — ні? Які альтернативні варіанти розв'язання ви можете запропонувати?

5. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{h(x)}$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} \geq \sqrt{x}; \sqrt{3+x} - \sqrt{x-1} \geq \sqrt{x-2}; \sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+4}.$$

Для яких прикладів запропонований алгоритм є ефективним, а для яких — ні? Які альтернативні варіанти розв'язання ви можете запропонувати?