

10

Тема 3.

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 11. Урок–практикум.

Розв'язування ірраціональних рівнянь, систем ірраціональних рівнянь та нерівностей

Тип уроку: комбінований урок.

План уроку

1. Робота учнів/учениць над індивідуальними (груповими) проєктами.
2. Розв'язування ірраціональних рівнянь.
3. Розв'язування систем ірраціональних рівнянь.
4. Розв'язування ірраціональних нерівностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку – закріплення умінь та навичок щодо розв'язування типових ірраціональних рівнянь, нерівностей та систем ірраціональних рівнянь.

- 2) Додаткова мета уроку – формування умінь розв’язувати ірраціональні нерівності методом інтервалів.
- 3) Важливо постійно акцентувати увагу при розв’язанні рівнянь, їхніх систем та нерівностей на використання та зміст понять ОДЗ, рівносильні перетворення, рівносильні системи.
- 4) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 5) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Оцініть найменший катет прямокутного трикутника з гіпотенузою 5 см, за умови, що площа даного трикутника не менша від 6 см².

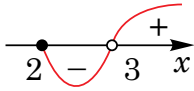
I. Робота учнів/учениць над індивідуальними (груповими) проєктами

На початку уроку запропонуйте учням обрати форму роботи над мініпроєктами, присвяченими методу інтервалів для розв’язування ірраціональних нерівностей: індивідуальну або групову. Розподіліть теми проєктів у відповідності до вподобань і можливостей учнів. Після роботи над проєктами варто організувати коротке підведення підсумків — усі учні/учениці мають узагальнити результати своєї роботи з розв’язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів.

Завдання для проєктів

1. Розв’яжіть ірраціональну нерівність методом інтервалів за поданим зразком. Складіть алгоритм розв’язування подібних нерівностей.

Зразок розв’язання	Завдання
$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} < \sqrt{x+6}$	$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1} \leq \sqrt{x+9}$
Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+6}$ та нерівність $f(x) < 0$.	
ОДЗ: $\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \Leftrightarrow x \in [2; +\infty). \\ x+6 \geq 0; \end{cases}$	

Зразок розв'язання	Завдання
Розв'яжемо відповідне рівняння, використовуючи рівносильні перетворення: $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+6} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2+x+1+2\sqrt{(x-2)(x+1)} = x+6, \\ x-2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(x-2)(x+1)} = 7-x, \\ x \geq 2; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-2)(x+1) = (7-x)^2, \\ 2 \leq x \leq 7; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 10x - 57 = 0, \\ 2 \leq x \leq 7; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 3, \\ x = -\frac{19}{3} \Leftrightarrow x = 3. \\ 2 \leq x \leq 7; \end{cases}$	
	
Відповідь. [2; 3).	

2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність методом інтервалів за поданим алгоритмом. Розв'яжіть ту саму нерівність, використовуючи рівносильні перетворення. Порівняйте отримані результати.

Алгоритм розв'язання	Приклад $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} \leq \sqrt{x}$
Зведіть нерівність до вигляду $f(x) \geq 0$ (≤ 0 , > 0 , < 0).	
Знайдіть ОДЗ нерівності.	
Знайдіть нулі функції $y = f(x)$, тобто розв'яжіть рівняння $f(x) = 0$.	
Позначте нулі функції $y = f(x)$ на ОДЗ та визначте знак цієї функції на кожному з утворених інтервалів ОДЗ.	
Запишіть відповідь, ураховуючи знак нерівності $f(x) \geq 0$ (≤ 0 , > 0 , < 0).	

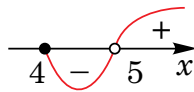
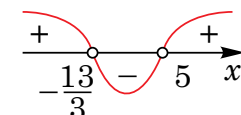
3. Знайдіть в інтернеті інформацію щодо розв'язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів. Опрацюйте її та розв'яжіть цим методом нерівність

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} \leq \sqrt{x-1}.$$

4. Проаналізуйте два способи розв'язання ірраціональної нерівності

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} < \sqrt{x+4}$$

та аргументуйте, який із них у наведеній ситуації є більш ефективним. Зробіть висновки.

Розв'язання методом інтервалів	Розв'язання методом рівносильних перетворень
$\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} < \sqrt{x+4}$	$\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} < \sqrt{x+4}$
Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+4}$ та нерівність $f(x) < 0$. ОДЗ: $\begin{cases} x-4 \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \Leftrightarrow x \in [4; +\infty). \\ x+4 \geq 0; \end{cases}$ Розв'яжемо відповідне рівняння, використовуючи рівносильні перетворення: $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-4+x-1+2\sqrt{(x-4)(x-1)} = x+4, \\ x-4 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(x-4)(x-1)} = 9-x, \\ x \geq 4; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-4)(x-1) = (9-x)^2, \\ 4 \leq x \leq 9; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 65 = 0, \\ 4 \leq x \leq 9; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x = -\frac{13}{3} \\ 4 \leq x \leq 9. \end{cases}$ Знайдемо знаки функції $f(x)$ на ОДЗ:  Відповідь. $[4; 5)$	Піднесемо дану нерівність до квадрата і запишемо рівносильну систему: $\begin{cases} x-4+x-1+2\sqrt{(x-4)(x-1)} < x+4, \\ x-4 \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \\ x+4 \geq 0. \end{cases}$ Виконаємо рівносильні перетворення, враховуючи властивості нерівності виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$: $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(x-4)(x-1)} < 9-x, \\ x \geq 4; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-4)(x-1) < (9-x)^2, \\ 4 \leq x \leq 9; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 65 < 0, \\ 4 \leq x \leq 9. \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-5)\left(x + \frac{13}{3}\right) < 0, \\ 4 \leq x \leq 9. \end{cases}$ Розв'яжемо першу нерівність отриманої системи методом інтервалів:  Розв'яжемо систему: $\begin{cases} -\frac{13}{3} < x < 5, \\ 4 \leq x \leq 9; \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x < 5.$ Відповідь. $[4; 5)$.

II. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь та нерівностей різними методами

Задачі для роботи в парах

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$.
2. Розв'яжіть ірраціональну нерівність методом інтервалів: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} \leq 1$.
3. Розв'яжіть ірраціональну нерівність методом рівносильних перетворень: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} \leq 1$.
4. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} \leq 4$ трьома методами: інтервалів, рівносильних перетворень, використанням монотонності.

III. Мозковий штурм при розв'язуванні ірраціональних рівнянь та нерівностей, систем ірраціональних рівнянь

- 1) Даємо учням/ученицям одразу декілька завдань для самостійного генерування ідей.
- 2) Обговорюємо їхні ідеї разом за допомогою методу «мозкового штурму», з'ясовуємо попередньо придатність цих ідей та їхню ефективність для розв'язання даної проблеми.
- 3) Перевіряємо отримані висновки на дошці (інтерактивній дошці, екрані і т. ін.) — етап реалізації ідей.
- 4) Колективно вносимо виправлення та додаткові ідеї для повного розв'язання та обґрунтування отриманих результатів.
- 5) Підводимо підсумки.

Задачі для мозкового штурму

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x+3} + 2\sqrt{2x-3} = 5$.
6. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} < \sqrt{2-x}$.
7. Знайдіть множину розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$$
- 8*. Знайдіть усі пари $(x_0; y_0)$, що задовольняють систему
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} \geq x, \\ y \leq 2. \end{cases}$$

IV. Розв'язання геометричної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Оцініть найменший катет прямокутного трикутника з гіпотенузою 5 см, за умови, що площа даного трикутника не менша від 6 см².

Розв'язання. Нехай невідомий менший катет даного прямокутного трикутника дорівнює x (см). Тоді другий катет, за теоремою Піфагора, дорівнюватиме $\sqrt{25 - x^2}$.

Оскільки площа трикутника дорівнює півдобутку катетів, то: $S = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{25 - x^2}$. Ура-

ховуючи умову задачі, маємо систему нерівностей для додатних значень змінної x :

$$\begin{cases} x \leq \sqrt{25 - x^2}, \\ \frac{x \cdot \sqrt{25 - x^2}}{2} \geq 6. \end{cases}$$

Виконаємо рівносильні перетворення:

$$\begin{cases} x^2 \leq 25 - x^2, \\ x > 0, \\ x \cdot \sqrt{25 - x^2} \geq 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{5\sqrt{2}}{2}, \\ x \cdot \sqrt{25 - x^2} \geq 12. \end{cases}$$

Розв'яжемо другу нерівність системи методом інтервалів.

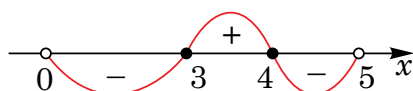
Нехай $f(x) = x \cdot \sqrt{25 - x^2} - 12$.

При $0 < x < 5$ розглянемо відповідне рівняння:

$$x \cdot \sqrt{25 - x^2} = 12, \quad x^2 \cdot (25 - x^2) = 144, \quad x^4 - 25x^2 + 144 = 0.$$

Отримане бікватратне рівняння має два додатних корені: 3 та 4.

Знайдемо знаки функції $f(x)$ на ОДЗ: $f(x) = x \cdot \sqrt{25 - x^2} - 12$.



Отже, $3 \leq x \leq 4$, а з урахуванням першої нерівності системи, $3 \leq x \leq \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. Від 3 см до $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см.

V. Рефлексія. Самооцінювання роботи в групі (1–2 хв)

Показники	Завжди	Не систематично	Іноді
Я добре співпрацював/співпрацювала з іншими учасниками групи.			
Я намагався/намагалася зрозуміти і виконати спільні завдання.			
Я брав/брала активну участь в обговоренні проблем.			

Показники	Завжди	Не систематично	Іноді
Я висловлював/висловлювала нові ідеї та вносив/вносила пропозиції, які реалізувались.			
Я запрошував/запрошувала до роботи та підбадьорював/підбадьорювала інших			

Можливі теми проєктів

- Розробіть алгоритм для розв'язування методом інтервалів ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} \geq e$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d, e . Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:
 - $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} \geq 5$;
 - $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} \geq 1$;
 - $\sqrt{5-2x} + \sqrt{3x+10} \geq 5$;
 - $\sqrt{3x+10} - \sqrt{5-2x} \geq 3$.
- Розробіть алгоритм для розв'язування методом інтервалів ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} < e$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d, e . Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:
 - $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+12} < 5$;
 - $\sqrt{x+12} - \sqrt{x-3} < 3$;
 - $\sqrt{5-4x} + \sqrt{3x+13} < 5$;
 - $\sqrt{3x+13} - \sqrt{5-4x} < 3$.
- Розробіть алгоритм, заснований на ідеї застосування монотонності функції, для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} \geq e$ (врахуйте варіанти різних значень параметрів a, b, c, d, e , за умови $a > 0, c > 0$). Припустіть, що ви знайшли число x_0 , для якого виконується рівність $\sqrt{ax_0+b} + \sqrt{cx_0+d} = e$. Продемонструйте роботу алгоритму на прикладах:
 - $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} \geq 5$;
 - $\sqrt{x+8} + \sqrt{x+15} \geq 7$;
 - $\sqrt{5+2x} + \sqrt{3x+10} \geq 7$;
 - $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+11} \geq 6$.