

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 14. Аналіз контрольної роботи

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

Розв'язання задач варіанту 1

Початковий рівень

1. Укажіть рівняння, яке не має дійсних коренів.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[5]{x-1} = -2$	$\sqrt[5]{1-x} = -2$	$1 - \sqrt{x} = -2$	$-1 + \sqrt{x} = -2$	$\sqrt[5]{\sqrt{x}} = 0$

Розв'язання. Рівняння $-1 + \sqrt{x} = -2$ рівносильне рівнянню $\sqrt{x} = -1$, але арифметичний квадратний корінь не може набувати від'ємних значень. Легко впевнитися в тому, що всі інші рівняння з умови задачі мають дійсні розв'язки.

Відповідь. Г.

2. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\sqrt{2x-7} \leq 5$?

А	Б	В	Г	Д
5	25	13	16	безліч

Розв'язання. Перейдемо до системи, рівносильної до даної нерівності, та розв'яжемо її:

$$\sqrt{2x-7} \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7 \leq 25, \\ 2x-7 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq 2x-7 \leq 25 \Leftrightarrow 7 \leq 2x \leq 32 \Leftrightarrow 3,5 \leq x \leq 16.$$

Серед отриманих розв'язків маємо 13 цілих чисел: 4, 5, 6, ..., 15, 16.

Відповідь. В.

Середній рівень

3. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{2x+5} = x+1$.

Розв'язання. Перейдемо до системи, рівносильної до даного рівняння, та розв'я-

жемо її: $\sqrt{2x+5} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 = (x+1)^2, \\ x+1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -2, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Відповідь. 2.

4. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+3} > x$.

Розв'язання. Перейдемо до сукупності, рівносильної до даної нерівності, та розв'я-

жемо її: $\sqrt{x+3} > x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x+3 > x^2, \end{cases}$

1) $\begin{cases} x \geq 0, \\ x+3 > x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - x - 3 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right); \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right).$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ x+3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \geq -3; \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 0.$

Отже, дану нерівність задовольняють числа з множини $\left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right).$

Таким чином, найменшим цілим розв'язком є число -3 .

Зауваження. При даному формулюванні завдання не обов'язково було знаходити всі дійсні розв'язки нерівності. Достатньо було помітити, що при цілому значенні $x = -3$ нерівність перетворюється на правильну: $\sqrt{0} > -3$. При цьому до ОДЗ даної нерівності входять лише числа $x \geq -3$. Тому найменшим цілим розв'язком даної нерівності є число -3 .

Відповідь. -3 .

5. Знайдіть суму $x_0 + y_0$ для розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 7, \\ 4\sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{x} = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних $\sqrt[4]{x} = a, \sqrt[4]{y} = b$ та розв'яжемо методом додавання відповідну систему лінійних рівнянь:

$$+ \begin{cases} 2a + b = 7, \\ -a + 4b = 1; \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 9b = 9, \\ 2a + b = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1, \\ a = 3. \end{cases}$$

Повернемося до початкових змінних: $\begin{cases} \sqrt[4]{x} = 3, \\ \sqrt[4]{y} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 81, \\ y = 1. \end{cases}$

Тоді $x_0 + y_0 = 81 + 1 = 82$.

Відповідь. 82.

Достатній рівень

6. Розв'яжіть нерівність: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} \leq \sqrt{7x+4}$.

Розв'язання. Піднесемо обидві невід'ємні частини даної нерівності до квадрата та перейдемо до рівносильної системи:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} \leq \sqrt{7x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1+2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} + x+6 \leq 7x+4, \\ x+1 \geq 0, \\ x+6 \geq 0, \\ 7x+4 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему методом рівносильних перетворень:

$$\begin{cases} x+1+2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} + x+6 \leq 7x+4, \\ x+1 \geq 0, \\ x+6 \geq 0, \\ 7x+4 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2+7x+6} \leq 5x-3, \\ x \geq -\frac{4}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2+7x+6) \leq (5x-3)^2, \\ 5x-3 \geq 0, \\ x \geq -\frac{4}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x^2-58x-15 \geq 0, \\ x \geq \frac{3}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq -\frac{5}{21}, \\ x \geq \frac{3}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Зауваження. Дану нерівність також можна було розв'язати методом інтервалів.

Відповідь. $[3; +\infty)$.

7. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2x-6} + \sqrt[3]{x-7} = 2$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінних $\sqrt[3]{2x-6} = a, \sqrt[3]{x-7} = b$ та помітимо, що

$a^3 - 2b^3 = 8$. Розв'яжемо методом підстановки відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a+b=2, \\ a^3-2b^3=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b, \\ (2-b)^3-2b^3=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b, \\ (2-b)^3-2b^3=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b, \\ 3b^3-6b^2+12b=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2, \\ b=0. \end{cases}$$

Повернемося до початкових змінних: $\begin{cases} \sqrt[3]{2x-6} = 2, \\ \sqrt[3]{x-7} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$

Зауваження. Дане рівняння можна було також розв'язати, використовуючи монотонність функції $y = \sqrt[3]{2x-6} + \sqrt[3]{x-7}$, або піднесенням обох частин до куба (з перевіркою відповідей).

Відповідь. 7.

Високий рівень

8. Знайдіть множину розв'язків рівняння $\sqrt{x+6} - a = \sqrt{x-3}$ в залежності від значення параметра a .

Розв'язання. Зробимо заміну змінних $\sqrt{x+6} = p, \sqrt{x-3} = q$ та помітимо, що $p^2 - q^2 = 9$, і при цьому $p \geq 0, q \geq 0$. Розв'яжемо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} p-q=a, \\ p^2-q^2=9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-q=a, \\ (p-q)(p+q)=9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-q=a, \\ a(p+q)=9. \end{cases}$$

Зрозуміло, що при $a = 0$ система не має розв'язків. Нехай тепер $a \neq 0$, тоді:

$$\begin{cases} p - q = a, \\ p + q = \frac{9}{a}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{a + \frac{9}{a}}{2}, \\ q = \frac{\frac{9}{a} - a}{2}. \end{cases}$$

Оскільки $p \geq 0, q \geq 0$, то $a \in (0; 3]$.

При таких значеннях параметра a однозначно знаходиться x :

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} = \frac{a + \frac{9}{a}}{2}, \\ \sqrt{x-3} = \frac{\frac{9}{a} - a}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{a^4 - 6a^2 + 81}{4a^2}.$$

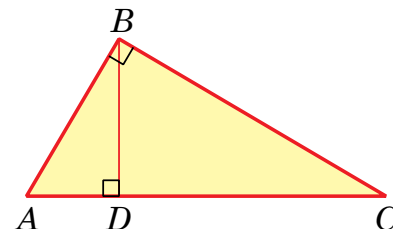
Зауваження. Дане рівняння можна було також розв'язувати з використанням графіків.

Відповідь. Якщо $a \in (0; 3]$, то рівняння має один розв'язок: $x = \frac{a^4 - 6a^2 + 81}{4a^2}$. При інших значеннях параметра a рівняння не має дійсних розв'язків.

9. У прямокутному трикутнику з вершини прямого кута проведено висоту. Вона розбиває гіпотенузу на відрізки, один із яких менший від цієї висоти на 1,2 см, а другий більший за неї на 1,6 см. Знайдіть площу даного прямокутного трикутника.

Розв'язання. Зробимо рисунок та будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього. Нехай $BD = x$ (см), тоді $AD = x - 1,2$ (см), а $CD = x + 1,6$ (см).

Використовуючи метричні співвідношення у прямокутному трикутнику, отримуємо ірраціональне рівняння $x = \sqrt{x-1,2} \cdot \sqrt{x+1,6}$.



Розв'яжемо його методом рівносильних перетворень:

$$x = \sqrt{x-1,2} \cdot \sqrt{x+1,6} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = (x-1,2)(x+1,6), \\ x-1,2 \geq 0, \\ x+1,6 \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,8, \\ x \geq 1,2; \end{cases} \Leftrightarrow x = 4,8.$$

Отже, $BD = 4,8$ (см), тоді $AD = 3,6$ (см), а $CD = 6,4$ (см).

Відповідно, площа трикутника дорівнює: $S = \frac{1}{2} \cdot (3,6 + 6,4) \cdot 4,8 = 24$ (см²).

Відповідь. 24 см².

Додаткове завдання

Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних $\sqrt{x+\sqrt{y}} = a, \sqrt{x-\sqrt{y}} = b$ та помітимо, що $a^2 - b^2 = 2\sqrt{y}$. Розв'яжемо систему рівнянь, що відповідає першому рівнянню заданої системи:

$$\begin{cases} a+b=2, \\ a^2-b^2=2\sqrt{y}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2, \\ (a-b)(a+b)=2\sqrt{y}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2, \\ a-b=\sqrt{y}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2, \\ a-b=\sqrt{y}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{y}+2}{2}, \\ b = \frac{2-\sqrt{y}}{2}. \end{cases}$$

Повернемося до початкових змінних:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{y}+2}{2} = \sqrt{x+\sqrt{y}}, \\ \frac{2-\sqrt{y}}{2} = \sqrt{x-\sqrt{y}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y+4\sqrt{y}+4}{4} = x+\sqrt{y}, \\ \frac{4-4\sqrt{y}+y}{4} = x-\sqrt{y}, \\ x \geq 0, y \geq 0, \\ y \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = y+4, \\ x \geq 0, \\ 0 \leq y \leq 4. \end{cases}$$

Зробимо аналогічну заміну змінних $\sqrt{y+\sqrt{x}} = c, \sqrt{y-\sqrt{x}} = d$ та помітимо, що $c^2 - d^2 = 2\sqrt{x}$. Розв'яжемо систему рівнянь, що відповідає другому рівнянню заданої системи:

$$\begin{cases} c-d=1, \\ c^2-d^2=2\sqrt{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c-d=1, \\ (c-d)(c+d)=2\sqrt{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c-d=1, \\ c+d=2\sqrt{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2\sqrt{x}+1}{2}, \\ d = \frac{2\sqrt{x}-1}{2}. \end{cases}$$

Повернемося до початкових змінних:

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{x}+1}{2} = \sqrt{y+\sqrt{x}}, \\ \frac{2\sqrt{x}-1}{2} = \sqrt{y-\sqrt{x}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+4\sqrt{x}+1}{4} = y+\sqrt{x}, \\ \frac{4x-4\sqrt{x}+1}{4} = y-\sqrt{x}, \\ x \geq 0, y \geq 0, \\ x \geq \frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1=4y, \\ y \geq 0, \\ x \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Отже, ми отримали наступну систему умов:

$$\begin{cases} 4x = y+4, \\ 4x+1=4y, \\ 0 \leq y \leq 4, \\ x \geq \frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = y+4, \\ 4x+1=4y, \\ 0 \leq y \leq 4, \\ x \geq \frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{12}, \\ y = \frac{5}{3}, \\ 0 \leq y \leq 4, \\ x \geq \frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{12}, \\ y = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Зауваження. Варто звернути увагу на рівносильність переходів, оскільки виконання перевірки не є простим.

Відповідь. $\left(\frac{17}{12}; \frac{5}{3}\right)$.

Рефлексія

Зобразіть сходи успіху і позначте свій рівень розуміння вивченої змістової теми.

1 сходинка — «Мені складно, потрібно ще попрацювати».

2 сходинка — «Я щось зрозумів/зрозуміла, але ще маю запитання».

3 сходинка — «Можу розв'язувати завдання самостійно».

4 сходинка — «Можу пояснити завдання іншим».

