

10

Тема 3.

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 2. Урок —практикум. Розв'язування ірраціональних рівнянь

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь із застосуванням теореми про піднесення обох частин рівняння до непарного степеня.
3. Робота в малих групах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь із застосуванням теореми про піднесення обох частин рівняння до парного степеня.
4. Самостійна робота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку – формування стійких умінь та навичок щодо розв'язування найпростіших ірраціональних рівнянь.
- 2) Додаткова мета уроку – формування умінь розв'язувати більш складні ірраціональні рівняння.

- 3) Важливо постійно акцентувати увагу при розв'язанні рівнянь на використання та зміст понять ОДЗ, рівносильні (нерівносильні) перетворення, рівносильні рівняння, рівняння-наслідки, сторонні корені, перевірка.
- 4) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 5) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що – додатковою.
- 6) При проведенні уроку використовуйте активності: фронтальна робота, робота в парах, робота в малих групах.

I. Організаційна частина (2 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У рівнобічній трапеції бічна сторона на 7 см менша від діагоналі. Знайдіть площу трапеції, якщо її більша основа дорівнює 21 см, а висота становить 8 см.

II. Повторення

Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

1. Знайдіть ОДЗ рівняння $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x} = \sqrt{3}$.
Відповідь. $[2; 5]$
2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[5]{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt[5]{x^2 - x + 3}$.
Відповідь. 0; 4.
3. Знайдіть множину розв'язків рівняння $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x}$.
Відповідь. $\{-3\}$.
4. Розв'яжіть ірраціональне рівняння $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+5} = x$.
Відповідь. $3\frac{1}{3}$.
5. Розв'яжіть рівняння, враховуючи його ОДЗ: $\sqrt{x-2} - \sqrt{2-x} = x^2 - 5x + 6$.
Відповідь. 2.

Завдання для обговорення

1. Доведіть, що рівняння $\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{6 - 3x} = -2$ не має дійсних коренів.
Вказівка. Ліва частина рівняння набуває лише невід'ємних значень, натомість права частина є від'ємним числом.
2. Розв'яжіть рівняння $(2-x)^{\frac{2}{3}} = 25$.
Відповідь. $1\frac{124}{125}$.

3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = 7$ із використанням властивостей монотонної функції.

Вказівка. Функція $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{x+11}$ є зростаючою, тому рівняння має не більше одного кореня, який дорівнює 5.

III. Розв'язування ірраціональних рівнянь із застосуванням теореми про піднесення обох частин рівняння до непарного степеня

Теорема 1. При піднесенні обох частин рівняння до одного й того самого непарного натурального степеня отримаємо рівносильне рівняння.

Це означає, що: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^n(x) = g^n(x)$ при непарному натуральному значенні n .

<i>Найпростіші ірраціональні рівняння, що містять корінь непарного степеня</i>		
Вид рівняння	Рівносильна умова	Приклад
$\sqrt[n]{f(x)} = a, n — \text{непарне}$	$f(x) = a^n$	$\sqrt[3]{7x-1} = -2,$ $7x-1 = -8,$ $7x = -7,$ $x = -1.$
$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}, n — \text{непарне}$	$f(x) = g(x)$	$\sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{x+1},$ $2x-3 = x+1,$ $x = 4.$

Завдання для роботи в парах

- Знайдіть область допустимих значень ірраціонального рівняння
$$\sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{x^2-2x+1}.$$
- Розв'яжіть рівняння $\sqrt[5]{3x^2-5x-30} = -2.$
- Доведіть, що рівняння не має розв'язків у дійсних числах $\sqrt[3]{x^4+5x^2} = \sqrt[3]{x^2-3}.$
- Знайдіть та виправте помилку в розв'язанні ірраціонального рівняння

$$(x+1)^{\frac{4}{5}} = 16.$$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до п'ятого степеня, отримаємо рівносильне рівняння:

$$(x+1)^{\frac{4}{5}} = 16 \Leftrightarrow \left((x+1)^{\frac{4}{5}} \right)^5 = 16^5.$$

Виконаємо рівносильні перетворення:

$$\left((x+1)^{\frac{4}{5}} \right)^5 = 16^5 \Leftrightarrow (x+1)^4 = 2^{20} \Leftrightarrow x+1 = \pm \sqrt[4]{2^{20}} \Leftrightarrow x+1 = \pm 2^5 \Leftrightarrow x+1 = \pm 32.$$

Звідси знаходимо два кореня даного рівняння: $x = 31$; $x = -33$.

Відповідь. 31; -33.

5. Заповніть пропуски у розв'язанні рівняння $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{6-x} = 3$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до куба, скориставшись формулою $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$, і отримаємо рівносильне рівняння:

$$x+3+3\left(\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{6-x}\right) \cdot \sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{6-x} + 6-x = \dots$$

Підставимо значення ... замість виразу у дужках (..... перетворення):

$$\dots + 3 \cdot \dots \cdot \sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{6-x} = \dots$$

Після виконання рівносильних перетворень отримуємо рівняння

$$\sqrt[3]{x+3} \cdot \sqrt[3]{6-x} = \dots$$

Знов підносимо обидві частини рівняння до куба:

$$(x+3)(6-x) = \dots$$

Звідси або $x = \dots$, або $x = \dots$.

Зробимо перевірку:

$$\sqrt[3]{\dots+3} + \sqrt[3]{6-\dots} = 3 \dots; \sqrt[3]{\dots+3} + \sqrt[3]{6-\dots} = 3 \dots$$

Відповідь. _____

IV. Розв'язування ірраціональних рівнянь із застосуванням теореми про піднесення обох частин рівняння до парного степеня

Теорема 2. При піднесенні обох частин рівняння до одного й того самого парного натурального степеня отримуємо (у загальному випадку) рівняння-наслідок.

Це означає, що $f(x) = g(x) \Rightarrow f^n(x) = g^n(x)$ при парному натуральному значенні n , і тому при використанні даної теореми для розв'язування ірраціональних рівнянь (без додаткових міркувань) треба робити перевірку знайдених коренів підстановкою до початкового рівняння.

<i>Найпростіші ірраціональні рівняння, що містять корінь парного степеня</i>		
Вид рівняння	Рівносильна умова	Приклад
$\sqrt[n]{f(x)} = a, a \geq 0, n — \text{парне}$	$f(x) = a^n$	$\sqrt{x^2 - 5x + 10} = 2,$ $x^2 - 5x + 10 = 4,$ $x^2 - 5x + 6 = 0,$ $x = 2, x = 3.$
$\sqrt[n]{f(x)} = a, a < 0, n — \text{парне}$	$\emptyset$	$\sqrt{x^2 - 5x + 7} = -2,$ Немає розв'язків.

Найпростіші ірраціональні рівняння, що містять корінь парного степеня		
Вид рівняння	Рівносильна умова	Приклад
$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, n — парне	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 5x + 1} &= \sqrt{x - 4}, \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 1 = x - 4, \\ x - 4 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x \geq 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5, \\ x = 1, \Leftrightarrow x = 5 \\ x \geq 4. \end{cases} \end{aligned}$

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = 2$. Обговоріть рівносильність/нерівносильність виконаних перетворень.
2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{3x^4 + 2x^2 - 1} = -2$. Скільки елементів містить множина його розв'язків?
3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{6x^2 + 2x - 10} = \sqrt{x^2 - x - 2}$ за допомогою рівнянь-наслідків. Зробіть перевірку та знайдіть корінь рівняння або суму коренів рівняння, якщо їх декілька.
4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{7 - 5x} = \sqrt{x^2 - 17}$ двома способами:
 - за допомогою рівнянь-наслідків із виконанням перевірки;
 - методом переходу до рівносильної системи.Порівняйте ефективність даних методів.
5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{x + 5} = 1$ за допомогою теореми про піднесення обох частин рівняння до парного степеня. Який етап розв'язання передуює запису відповіді?

1. Знайдіть добуток коренів рівняння $\sqrt{x^4 + 19} = 10$.

А	Б	В	Г	Д
9	−9	10	190	−10

2. Укажіть проміжок, до якого належить корінь рівняння $\sqrt[3]{x-3} = -2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-6; -3)$	$(-3; 0)$	$(0; 3)$	$(3; 6)$	інша відповідь

3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3-2x} = -x$.

А	Б	В	Г	Д
1	-1	-2	-3	не має коренів

4. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-2} = 1$?

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	безліч	жодного

5. Усі корені рівняння $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$ є:

А	Б	В	Г	Д
натуральними числами	цілими недодатними числами	раціональними, але не цілими числами	від'ємними числами	ірраціональними числами

VI. Розв'язання геометричної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

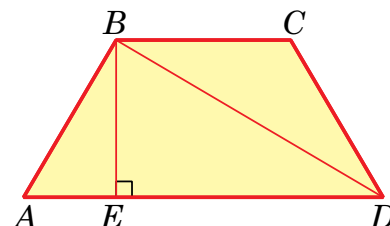
- Задача.** У рівнобічній трапеції бічна сторона на 7 см менша від діагоналі. Знайдіть площу трапеції, якщо її більша основа дорівнює 21 см, а висота становить 8 см.

Розв'язання. Зробимо рисунок відповідно до умови та будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього.

Нехай $AB = x$ (см), тоді $DB = x + 7$ (см).

Використаємо теорему Піфагора в трикутниках ABE

та EBD : $AE = \sqrt{x^2 - 64}$, $ED = \sqrt{(x + 7)^2 - 64}$.



Оскільки $AE + DE = AD$, то отримаємо рівняння, яке розв'яжемо методом переходу до рівнянь-наслідків:

$$\sqrt{x^2 - 64} + \sqrt{(x + 7)^2 - 64} = 21.$$

Перенесемо перший доданок праворуч, піднесемо обидві частини отриманого рівняння до квадрата і виконаємо рівносильні перетворення:

$$\sqrt{(x + 7)^2 - 64} = 21 - \sqrt{x^2 - 64}, \quad x^2 + 14x + 49 - 64 = 441 - 42\sqrt{x^2 - 64} + x^2 - 64,$$

$$14x + 49 = 441 - 42\sqrt{x^2 - 64}, \quad 42\sqrt{x^2 - 64} = 392 - 14x, \quad 3\sqrt{x^2 - 64} = 28 - x.$$

Знову піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$9 \cdot (x^2 - 64) = 784 - 56x + x^2, \quad \text{звідки отримуємо і розв'язуємо квадратне рівняння:}$$

$$x^2 + 7x - 170 = 0, \quad x = 10, \quad x = -17.$$

З урахуванням, що через x позначено довжину відрізка, отримуємо, що $x = 10$.

Оскільки піднесення до квадрата могло призвести до сторонніх коренів, виконаємо перевірку:

$$\sqrt{10^2 - 64} + \sqrt{(10 + 7)^2 - 64} = 21.$$

Звідси знаходимо: $AB = 10$ (см), $DB = 10 + 7 = 17$ (см), $ED = \sqrt{17^2 - 6^2} = 15$ (см). За властивостями рівнобічної трапеції, DE дорівнює середній лінії, тобто півсумі основ. Остаточного знаходимо площу трапеції: $S = 15 \cdot 8 = 120$ (см²).

Відповідь. 120 см².

Висновок. Одним з головних прийомів при розв'язанні ірраціональних рівнянь є піднесення обох частин рівняння до одного й того самого степеня. Але слід пам'ятати, що при натуральному показнику степеня, що є непарним числом, таке перетворення є рівносильним (знайдені корені не потребують перевірки). Якщо ж підносити обидві частини рівняння до парного степеня, то отримаємо рівняння-наслідок (корені потребують перевірки).

VII. Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
-
-
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
-
-

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

1. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt[n]{f(x)} \cdot g(x) = 0$, враховуючи варіанти різної парності показника кореня та область допустимих значень рівняння. Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
2. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\frac{\sqrt[n]{f(x)}}{g(x)} = 0$, враховуючи варіанти різної парності показника кореня та область допустимих значень рівняння. Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
3. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\frac{g(x)}{\sqrt[n]{f(x)}} = 0$, враховуючи варіанти різної парності показника кореня та область допустимих значень рівняння. Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
4. Дано рівняння $\sqrt{x^2 - 21x + 98} - \sqrt{x^2 - 16x + 63} = \sqrt{x^2 - 13x + 42}$ і два способи його розв'язання. Знайдіть помилку у першому способі. Доведіть до завершення другий спосіб. Розробіть алгоритм для розв'язання ірраціональних рівнянь такого виду.

Перший спосіб. $\sqrt{x^2 - 21x + 98} - \sqrt{x^2 - 16x + 63} = \sqrt{x^2 - 13x + 42}$,

$$\sqrt{(x-7)(x-14)} - \sqrt{(x-7)(x-9)} = \sqrt{(x-7)(x-6)},$$

$$\sqrt{x-7} \cdot (\sqrt{x-14} - \sqrt{x-9}) = \sqrt{x-7} \cdot \sqrt{x-6}.$$

1) Якщо $\sqrt{x-7} = 0$, то обидві частини отриманого рівняння дорівнюють нулю, тому $x = 7$ є коренем даного рівняння.

2) Якщо $\sqrt{x-7} \neq 0$ (тобто $x \neq 7$), то на цей вираз можна поділити обидві частини рівняння. Вийде стандартне рівняння, яке розв'яжемо методом отримання рівнянь-наслідків при піднесенні обох частин до квадрата.

$$\sqrt{x-14} - \sqrt{x-9} = \sqrt{x-6}, \quad x-14+x-9-2\sqrt{x-14} \cdot \sqrt{x-9} = x-6,$$

$$x-17 = 2\sqrt{x-14} \cdot \sqrt{x-9}, \quad x^2 - 34x + 289 = 4 \cdot (x^2 - 23x + 126),$$

$$3x^2 - 58x + 215 = 0, \quad \begin{cases} x = 5, \\ x = 14\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Перевірка:

$$\sqrt{5-14}-\sqrt{5-9}=\sqrt{5-6} ; \sqrt{14\frac{1}{3}-14}-\sqrt{14\frac{1}{3}-9}=\sqrt{14\frac{1}{3}-6} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}} .$$

Отже, при розв'язанні другого випадку обидва корені виявилися сторонніми.

Відповідь. $x = 7$.

Другий спосіб. $\sqrt{x^2-21x+98}-\sqrt{x^2-16x+63}=\sqrt{x^2-13x+42} .$

Знайдемо ОДЗ та будемо розв'язувати дане рівняння лише для значень змінної, що належить до цієї множини.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-7)(x-14)}-\sqrt{(x-7)(x-9)}=\sqrt{(x-7)(x-6)}, \\ & \begin{cases} (x-7)(x-14) \geq 0, \\ (x-7)(x-9) \geq 0, \\ (x-7)(x-6) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 7] \cup [14; +\infty), \\ x \in (-\infty; 7] \cup [9; +\infty), \\ x \in (-\infty; 6] \cup [7; +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 6] \cup [14; +\infty) \cup \{7\}. \end{aligned}$$

Розглянемо три випадки.

1) $x \in [14; +\infty)$.

$$\sqrt{x-7} \cdot (\sqrt{x-14}-\sqrt{x-9})=\sqrt{x-7} \cdot \sqrt{x-6}, \quad \sqrt{x-14}-\sqrt{x-9}=\sqrt{x-6} .$$

Оскільки зменшуване у лівій частині рівняння менше від'ємника, то вся ліва частина набуває лише від'ємних значень. Натомість права частина завжди невід'ємна. Таким чином, рівняння не має розв'язків.

2) $x = 7$.

Перевірка: $\sqrt{(7-7)(7-14)}-\sqrt{(7-7)(7-9)}=\sqrt{(7-7)(7-6)} .$

3) $x \in (-\infty; 6]$.

$$\sqrt{-(x-7)} \cdot (\sqrt{-(x-14)}-\sqrt{-(x-9)})=\sqrt{-(x-7)} \cdot \sqrt{-(x-6)} .$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Відповідь. 5; 7.