

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 3. Метод рівносильних перетворень при розв'язуванні ірраціональних рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) познайомитеся з методом рівносильних перетворень при розв'язуванні ірраціональних рівнянь;
- 2) пригадаєте означення рівносильних умов;
- 3) познайомитеся з ідеєю застосування заміни змінної при розв'язуванні ірраціональних рівнянь;
- 4) узнаете схеми розв'язування ірраціональних рівнянь із арифметичним квадратним коренем;
- 5) потренуєтеся у розв'язуванні геометричних задач алгебричними методами.

II. Повторення

1. Обчисліть значення виразу $(\sqrt{3}-1)^2 + \sqrt{12}$.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	$\sqrt{3}$	2

2. Для додатних значень a подайте значення виразу $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$ у вигляді степеня.

А	Б	В	Г	Д
a	$a^{\frac{13}{6}}$	a^3	$a^{\frac{9}{4}}$	a^2

3. Укажіть серед чисел: $a = \sqrt{5} - 2$; $b = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$; $c = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$ від'ємні числа.

А	Б	В	Г	Д
b	c	b, c	a, b, c	a, c

4. Знайдіть суму коренів рівняння $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 6x + 8} = x$.

А	Б	В	Г	Д
6	-6	8	-8	0

5. Скільки дійсних коренів має рівняння $\sqrt[3]{5 - \sqrt{2 - x}} = 1$?

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	жодного	безліч

III. Формулювання та доведення теорем про рівносильність ірраціональних рівнянь відповідним системам

Ви вже знаєте схеми розв'язання найпростіших ірраціональних рівнянь. Більш складні випадки часто можна звести до найпростіших. При цьому можна використовувати як рівняння-наслідки (з обов'язковою перевіркою коренів), так і рівносильні перетворення, що призводять до рівносильних рівнянь або систем. Розглянемо найбільш поширені варіанти рівносильних систем для рівнянь, що містять арифметичний квадратний корінь. Для інших випадків часто варто скористатися ідеями, аналогічними представленим нижче.

<i>Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов</i>		
Вид рівняння	Рівносильна система	Приклад
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 2 - x, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3} = x - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$

<i>Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов</i>		
Вид рівняння	Рівносильна система	Приклад
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a, a > 0$	$\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2-x)} = 1, \\ x \geq 0, \\ 2-x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = a, a > 0$	$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = a + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + 2a\sqrt{g(x)} + a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x - 2\sqrt{x(2-x)} = 1, \\ x \geq 2-x, \\ 2-x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	$\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2-x)} = x + 1, \\ x \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x+1 \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = h(x) + 2\sqrt{h(x) \cdot g(x)} + g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x - 2\sqrt{x(2-x)} = x - 3, \\ x \geq 2-x, \\ 2-x \geq 0, \\ x-3 \geq 0. \end{cases}$

При розгляді доведень акцентуйте увагу на рівносильності умов A та B : з умови A можна отримати умову B , і навпаки, з умови B можна отримати умову A . За допомогою подібних міркувань можна відтворити умови рівносильних систем у складних випадках, щоб не запам'ятовувати їх напам'ять. Також варто звернути увагу учнів/учениць на те, що у рівняннях з «відніманням» можна переходити до будь-якої з рівносильних систем (на практиці переходять до тієї, що «має більш простий вигляд»).

Вибрані доведення

1. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

При піднесенні обох частин рівняння до квадрата отримаємо рівняння-наслідок: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$. Також, з умов для ОДЗ рівняння випливає, що $f(x)$ має набувати лише невід'ємних значень. Таким чином, з даного рівняння випливає відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи. Оскільки функція $f(x)$ набуває невід'ємних значень, то й рівна їй функція $g(x)$ має таку саму властивість. Тому для рівних невід'ємних значень функцій буде правильним той факт, що й корені з них є рівними: $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Отже, наслідком даного рівняння є розглядувана система й, навпаки, із системи випливає виконання умови, заданої рівнянням. Таким чином, рівняння й система є рівносильними.

2. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

При піднесенні обох частин рівняння до квадрата отримаємо рівняння-наслідок: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = g^2(x)$. Оскільки арифметичний квадратний корінь, за означенням, набуває лише невід'ємних значень, то $g(x) \geq 0$. Таким чином, з даного рівняння випливає відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи. Оскільки функція $f(x)$ дорівнює квадрату функції $g(x)$, то вона набуває невід'ємних значень. Функція $g(x)$ має таку саму властивість, виходячи з системи. Тому для рівних невід'ємних значень функцій $f(x)$ та $g^2(x)$ буде правильним той факт, що й корені з них є рівними, звідки й випливає потрібне: $\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \sqrt{g^2(x)}, \Rightarrow \sqrt{f(x)} = g(x)$.

Отже, наслідком даного рівняння є розглядувана система й, навпаки, із системи випливає виконання умови, заданої рівнянням. Таким чином, рівняння й система є рівносильними.

3. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a \ (a > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

При піднесенні обох частин рівняння до квадрата отримаємо рівняння-наслідок: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a \Rightarrow f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x) = a^2$. Також, з умов для ОДЗ рівняння ви-

пливає, що $f(x)$ та $g(x)$ мають набувати лише невід’ємних значень. Таким чином, з даного рівняння випливає відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a \Rightarrow \begin{cases} f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x) = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи. Оскільки сума невід'ємних величин є невід'ємною, при цьому рівне до неї число a^2 має таку саму властивість, то буде правильним і той факт, що й корені з них є рівними, звідки й випливає потрібне:

$$\begin{cases} f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x) = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x)} = \sqrt{a^2}, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a.$$

Отже, наслідком даного рівняння є розглядувана система й, навпаки, із системи випливає виконання умови, заданої рівнянням. Таким чином, рівняння й система є рівносильними.

IV. Приклади використання теорем

При розв'язуванні рівнянь методом рівносильних перетворень треба на кожному кроці слідкувати, щоб отримати рівносильну систему умов. При цьому приналежність змінної до ОДЗ враховується автоматично. Знайдені в такий спосіб корені рівняння не потребують перевірки.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{3x}$.

[illegible]

Приклад 2. Знайдіть корені рівняння $\sqrt{5-x^2} = x-1$.

[illegible]

Приклад 3. Знайдіть множину коренів рівняння $\sqrt{x+1} + \sqrt{16-x} = 5$.

[illegible]

5. Урахуйте ОДЗ та розв'яжіть рівняння за допомогою заміни змінної:

а) $2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$; б) $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} = 4$; в) $x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} - 3 = 0$.

6. Знайдіть множину розв'язків рівняння:

а) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$; б) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$; в) $\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+1} + 2$.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння методом рівносильних перетворень:

а) $\sqrt{3+\sqrt{4-x}} = \sqrt{x+1}$; б) $\sqrt{1+x\sqrt{42+x^2}} = x+1$; в) $1 + \sqrt{1+x\sqrt{x^2-34}} = x$.

2. Використайте рівносильну систему та знайдіть корені рівняння:

а) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$; б) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$;
в) $\sqrt{x+2} + \sqrt{5x-10} = 2\sqrt{x-1}$.

3. Розв'яжіть кожне з наведених рівнянь двома способами: 1) зведенням до рівносильної системи та 2) зведенням до рівняння, що не містить різниці квадратних коренів і його рівносильної системи. Порівняйте ефективність даних підходів для кожного випадку.

а) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$; б) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$;
в) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{2x-5}$.

4. Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

а) $\sqrt{x-3} + 6 = 5\sqrt[4]{x-3}$; б) $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = 2,5$;
в) $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^3 + (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2 - 2 = 0$.

5. Урахуйте ОДЗ та розв'яжіть рівняння за допомогою заміни змінної:

а) $\sqrt{x}\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x}\sqrt{x} = 56$; б) $2x^{\frac{4}{3}} - 3x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20$; в) $\frac{x^{\frac{4}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}} - 1} - \frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4$.

6. Розв'яжіть рівняння за допомогою подвійної заміни змінної:

а) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x-1} = 5$; б) $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$; в) $\sqrt[3]{x-4} + \sqrt{x+1} = 1$.

7. Використайте заміну змінної для розв'язання рівняння:

а) $\sqrt[3]{x-10} + \sqrt[3]{x-17} = 3$; б) $\sqrt[3]{4x+3} - \sqrt[3]{x+2} = 1$; в) $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$.

8. Розв'яжіть рівняння, використавши метод заміни змінної:

а) $\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+7)^2} + \sqrt[3]{(x-2)(x+7)} = 3$;
б) $\sqrt[4]{x+80} - \sqrt[4]{2-x} = 4$; в) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$.

9. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x} = \sqrt{4-5x} + \sqrt{9+5x}$; б) $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{8x} - \sqrt{4x+2}$;
в) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+5} + \sqrt{3x}$.

10. Розв'яжіть ірраціональні рівняння:

а) $\frac{2}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{x+6}}{x+4}$;

б) $\frac{7x-2}{\sqrt{3x-8}} = 3\sqrt{2x+3}$;

в) $\sqrt{5x-5} = \frac{4}{\sqrt{3x-2}} + \sqrt{3x-2}$.

11. Знайдіть точки перетину графіків функцій:

а) $y = \sqrt[3]{x-1}$, $y = \sqrt[6]{x+5}$; б) $y = \sqrt{x+2}$, $y = \sqrt[3]{3x+2}$; в) $y = \sqrt{x+3}$, $y = \sqrt[3]{x+7}$.

12. При яких значеннях параметра a рівняння є рівносильними:

а) $\sqrt{(x+4)(x-a)} = 0$, $(x+4)\sqrt{x-a} = 0$;

б) $\sqrt{(x+4)(x-a)} = 0$, $(x-a)\sqrt{x+4} = 0$;

в) $x^2 + \sqrt{x+4} = a + \sqrt{x+4}$, $x^2 = a$?

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння методом рівносильних перетворень:

а) $\sqrt{14+|x|} = \sqrt{x^2-16}$; б) $|x-7| = 2\sqrt{2x-8}-3$; в) $\sqrt{4-x} = 3-|x-1|$.

2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$ двома способами. Порівняйте їхню ефективність. Чи має дане рівняння ірраціональні корені?

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3}$;

в) $x^3 + x + \sqrt[3]{x^3+x-2} = 12$.

4. Уведіть одну чи декілька нових змінних та розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4-2x$;

б) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2-16} - 12$;

в) $\frac{1}{\sqrt{13-x^2}} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$.

5. Розв'яжіть ірраціональні рівняння, що містять параметри:

а) $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x$; б) $x + \sqrt{a+\sqrt{x}} = a$; в) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x$.

6. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння має рівно один розв'язок:

а) $\sqrt{8x-x^2-15} = ax-1$; б) $\sqrt{4x-x^2-3} = x-a$; в) $\sqrt{-x^2-6x-5} = ax$.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

[illegible]

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й о дну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

1)

.

.

2)

.

.

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Різні заміни при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.
- 2.** Кількість розв'язків у рівняннях, що містять кубічні корені.
- 3.** Використання графіків функцій у системі координат xOa при розв'язуванні ірраціональних рівнянь, де a — параметр.
- 4.** Використання геометричних методів при розв'язуванні рівнянь з арифметичним квадратним коренем.
- 5.** Ірраціональні рівняння з параметром на ЗНО/НМТ.







