

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 3. Метод рівносильних перетворень при розв'язуванні ірраціональних рівнянь

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Формулювання та доведення теорем про рівносильність ірраціональних рівнянь відповідним системам.
2. Приклади використання зазначених теорем.
3. Метод заміни змінної при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

— використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку
- 2) Повторіть основні поняття попереднього уроку, розв'яжіть приклади на повторення.

- 3) Сформулюйте геометричну задачу, розв'язати яку надайте можливість учням/ученицям наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 8) Заплануйте виконання останніх блоків уроку, а саме: розв'язування геометричної задачі та тренувальних вправ як важливі компоненти формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Які умови в математиці називають рівносильними?
- 2) Які перетворення називають рівносильними?
- 3) Наведіть приклади рівносильних перетворень.
- 4) У якій ситуації можна напевно стверджувати, що виконується система певних умов?
- 5) Які загальні прийоми розв'язування рівнянь ви знаєте?

II. Повторення

1. Обчисліть значення виразу $(\sqrt{3}-1)^2 + \sqrt{12}$.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	$\sqrt{3}$	2

2. Для додатних значень a подайте значення виразу $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$ у вигляді степеня.

А	Б	В	Г	Д
a	$a^{\frac{13}{6}}$	a^3	$a^{\frac{9}{4}}$	a^2

3. Укажіть серед чисел: $a = \sqrt{5} - 2$; $b = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$; $c = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$ від'ємні числа.

А	Б	В	Г	Д
b	c	b, c	a, b, c	a, c

4. Знайдіть суму коренів рівняння $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 6x + 8} = x$.

А	Б	В	Г	Д
6	-6	8	-8	0

5. Скільки дійсних коренів має рівняння $\sqrt[3]{5 - \sqrt{2 - x}} = 1$?

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	жодного	безліч

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У гострокутному трикутнику провели висоту завдовжки 12 см до середньої за величиною сторони. Відомо, що сторони трикутника утворюють арифметичну прогресію з різницею 1. Знайдіть площу трикутника.

III. Формулювання та доведення теорем про рівносильність ірраціональних рівнянь відповідним системам

Ви вже знаєте схеми розв'язання найпростіших ірраціональних рівнянь. Більш складні випадки часто можна звести до найпростіших. При цьому можна використовувати як рівняння-наслідки (з обов'язковою перевіркою коренів), так і рівносильні перетворення, що призводять до рівносильних рівнянь або систем. Розглянемо найбільш поширені варіанти рівносильних систем для рівнянь, що містять арифметичний квадратний корінь. Для інших випадків часто варто скористатися ідеями, аналогічними представленим нижче.

<i>Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов</i>		
Вид рівняння	Рівносильна система	Приклад
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 2 - x, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3} = x - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$

<i>Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов</i>		
Вид рівняння	Рівносильна система	Приклад
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a, a > 0$	$\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2-x)} = 1, \\ x \geq 0, \\ 2-x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = a, a > 0$	$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = a + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + 2a\sqrt{g(x)} + a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x - 2\sqrt{x(2-x)} = 1, \\ x \geq 2-x, \\ 2-x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	$\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2-x)} = x + 1, \\ x \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x+1 \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = h(x) + 2\sqrt{h(x) \cdot g(x)} + g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x - 2\sqrt{x(2-x)} = x - 3, \\ x \geq 2-x, \\ 2-x \geq 0, \\ x-3 \geq 0. \end{cases}$

При розгляді доведень акцентуйте увагу на рівносильності умов A та B : з умови A можна отримати умову B , і навпаки, з умови B можна отримати умову A . За допомогою подібних міркувань можна відтворити умови рівносильних систем у складних випадках, щоб не запам'ятовувати їх напам'ять. Також варто звернути увагу учнів/учениць на те, що у рівняннях з «відніманням» можна переходити до будь-якої з рівносильних систем (на практиці переходять до тієї, що «має більш простий вигляд»).

Вибрані доведення

1. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

При піднесенні обох частин рівняння до квадрата отримаємо рівняння-наслідок: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$. Також, з умов для ОДЗ рівняння випливає, що $f(x)$ має набувати лише невід'ємних значень. Таким чином, з даного рівняння випливає відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи. Оскільки функція $f(x)$ набуває невід'ємних значень, то й рівна їй функція $g(x)$ має таку саму властивість. Тому для рівних невід'ємних значень функцій буде правильним той факт, що й корені з них є рівними: $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Отже, наслідком даного рівняння є розглядувана система й, навпаки, із системи випливає виконання умови, заданої рівнянням. Таким чином, рівняння й система є рівносильними.

2. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

При піднесенні обох частин рівняння до квадрата отримаємо рівняння-наслідок: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = g^2(x)$. Оскільки арифметичний квадратний корінь, за означенням, набуває лише невід'ємних значень, то $g(x) \geq 0$. Таким чином, з даного рівняння випливає відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи. Оскільки функція $f(x)$ дорівнює квадрату функції $g(x)$, то вона набуває невід'ємних значень. Функція $g(x)$ має таку саму властивість, виходячи з системи. Тому для рівних невід'ємних значень функцій $f(x)$ та $g^2(x)$ буде правильним той факт, що й корені з них є рівними, звідки й випливає потрібне: $\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \sqrt{g^2(x)}, \Rightarrow \sqrt{f(x)} = g(x)$.

Отже, наслідком даного рівняння є розглядувана система й, навпаки, із системи випливає виконання умови, заданої рівнянням. Таким чином, рівняння й система є рівносильними.

3. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a \ (a > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

При піднесенні обох частин рівняння до квадрата отримаємо рівняння-наслідок: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a \Rightarrow f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x) = a^2$. Також, з умов для ОДЗ рівняння ви-

пливає, що $f(x)$ та $g(x)$ мають набувати лише невід'ємних значень. Таким чином, з даного рівняння випливає відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a \Rightarrow \begin{cases} f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x) = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи. Оскільки сума невід'ємних величин є невід'ємною, при цьому рівне до неї число a^2 має таку саму властивість, то буде правильним і той факт, що й корені з них є рівними, звідки й випливає потрібне:

$$\begin{cases} f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x) = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x)} = \sqrt{a^2}, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a.$$

Отже, наслідком даного рівняння є розглядувана система й, навпаки, із системи випливає виконання умови, заданої рівнянням. Таким чином, рівняння й система є рівносильними.

IV. Приклади використання теорем

При розв'язуванні рівнянь методом рівносильних перетворень треба на кожному кроці слідкувати, щоб отримати рівносильну систему умов. При цьому приналежність змінної до ОДЗ враховується автоматично. Знайдені в такий спосіб корені рівняння не потребують перевірки.

Ілюстративні приклади

6. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{3x}$.

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи та будемо шукати множину її

розв'язків: $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{3x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 3x, \\ 3x \geq 0. \end{cases}$

Виконаємо рівносильні перетворення: $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 4, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

Відповідь. $x = 4$.

7. Знайдіть корені рівняння $\sqrt{5 - x^2} = x - 1$.

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи та будемо шукати множину її

розв'язків: $\sqrt{5 - x^2} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x^2 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$

Виконаємо рівносильні перетворення:

$$\begin{cases} 5 - x^2 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x - 4 = 0, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -2, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Відповідь. $x = 1$.

8. Знайдіть множину коренів рівняння $\sqrt{x+1} + \sqrt{16-x} = 5$.

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи та будемо шукати множину її розв'язків:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{16-x} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1+16-x+2\sqrt{(x+1)(16-x)} = 25, \\ x+1 \geq 0, \\ 16-x \geq 0. \end{cases}.$$

Виконаємо рівносильні перетворення:

$$\begin{cases} x+1+16-x+2\sqrt{(x+1)(16-x)} = 25, \\ x+1 \geq 0, \\ 16-x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+1)(16-x)} = 4, \\ x \geq -1, \\ x \leq 16. \end{cases}$$

Рівняння, отримане в ході рівносильних перетворень системи, має стандартний вид. Тож, застосуємо до нього відому схему переходу до рівносильного рівняння та знайдемо розв'язки системи:

$$\begin{cases} (x+1)(16-x) = 16, \\ x \geq -1, \\ x \leq 16. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 15x = 0, \\ x \geq -1, \\ x \leq 16. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 15, \\ x \geq -1, \\ x \leq 16. \end{cases}$$

Оскільки отримані корені рівняння системи задовольняють всім іншим умовам цієї системи, то вони і утворюють множину розв'язків.

Відповідь. $\{0; 15\}$.

V. Метод заміни змінної при розв'язуванні ірраціональних рівнянь

Іноколи при розв'язуванні рівнянь методом рівносильних перетворень виникають доволі громіздкі вирази, які складно перетворювати. Тоді варто звернути увагу на загальний алгебричний метод заміни змінної. Такий прийом може значно скоротити час на розв'язання рівняння. Найбільш поширеними ситуаціями для застосування заміни змінної для ірраціональних рівнянь є: 1) повторення схожих виразів зі змінною або 2) очевидний алгебричний зв'язок між підкореневими виразами.

Ілюстративні приклади

9. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12$.

Розв'язання. Виконаємо рівносильні перетворення і отримаємо наступне рівняння:

$$x^2 + 2x + 8 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} - 20 = 0.$$

Зробимо заміну змінної: $y = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$. Тоді розглядуване рівняння перетвориться на квадратне, яке легко розв'язати:

$$y^2 + y - 20 = 0, \begin{cases} y = -5, \\ y = 4. \end{cases}$$

Повернемося до змінної x :
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 8} = -5, \\ \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 4. \end{cases}$$

Перше з рівнянь отриманої сукупності не має розв'язків, а друге розв'язуємо методом рівносильних перетворень:

$\sqrt{x^2 + 2x + 8} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 8 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$. Отримані корені $x = -4$ та $x = 2$ і є розв'язками початкового рівняння.

Відповідь. $-4; 2$.

10. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

Розв'язання. Зробимо подвійну заміну змінної: $a = \sqrt[3]{2-x}$, $b = \sqrt{x-1}$. Тоді розглядуване рівняння перетвориться на $a + b = 1$. Крім того, сума підкоренових виразів також дорівнює 1. Отримаємо систему раціональних рівнянь, яку будемо розв'язувати методом підстановки:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a^3 + b^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a, \\ a^3 + (1 - a)^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a, \\ a^3 + a^2 - 2a = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a, \\ a(a^2 + a - 2) = 0. \end{cases}$$

Знайдені з системи варіанти пар змінних a та b призводять до трьох випадків у подальшому розв'язанні.

- 1) $\begin{cases} a = 0, \\ b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 0, \\ \sqrt{x-1} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$
- 2) $\begin{cases} a = 1, \\ b = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1, \\ \sqrt{x-1} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- 3) $\begin{cases} a = -2, \\ b = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = -2, \\ \sqrt{x-1} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow x = 10.$

Відповідь. $1; 2; 10$.

Висновок. Одним із найважливіших способів розв'язування рівнянь, зокрема ірраціональних, є метод рівносильних перетворень. Оскільки піднесення до квадрата може призвести до появи сторонніх коренів, то для рівносильного переходу використовують не одне рівняння, а систему умов. Також ефективним методом розв'язування ірраціональних рівнянь є метод заміни змінної.

VI. Розв'язання геометричної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

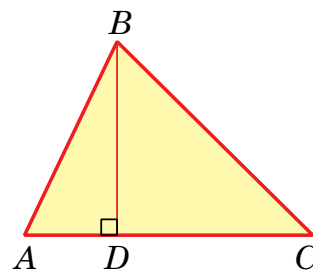
Задача. У гострокутному трикутнику провели висоту завдовжки 12 см до середньої за величиною сторони. Відомо, що сторони трикутника утворюють арифметичну прогресію з різницею 1. Знайдіть площу трикутника.

Розв'язання. Зробимо рисунок відповідно до умови та будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього.

Нехай $AC = x$ (см), тоді $AB = x - 1$ (см),
 $BC = x + 1$ (см).

Оскільки $BD = 12$ см, за умовою, то можна використати теорему Піфагора в трикутниках ABD та CBD і отримати рівняння: $\sqrt{(x+1)^2 - 144} + \sqrt{(x-1)^2 - 144} = x$.

Розв'яжемо дане рівняння методом рівносильних перетворень:



$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 - 144} + \sqrt{(x-1)^2 - 144} = x, \\ (x+1)^2 - 144 \geq 0, \\ (x-1)^2 - 144 \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 - 144 + (x-1)^2 - 144 + 2\sqrt{((x+1)^2 - 144)((x-1)^2 - 144)} = x^2, \\ x \geq 13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{((x+1)^2 - 144)((x-1)^2 - 144)} = 286 - x^2, \\ x \geq 13; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^4 - 588x^2 = 0, \\ x \geq 13; \end{cases} \quad x = 14.$$

Отже, даний трикутник має сторони 13 см, 14 см, 15 см, а його площа дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 84 см².

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{2x-9} - \sqrt{x} = 0$; б) $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x-1}$; в) $\sqrt{x^2-4x+5} = \sqrt{x-1}$.

2. Розв'яжіть рівняння методом рівносильних перетворень:

а) $\sqrt{2x+4-x^2} = x-2$; б) $\sqrt{13-x} = x-3$; в) $\sqrt{2x^2+8x+7} = x+2$.

3. Використайте рівносильну систему та знайдіть корені рівняння:

а) $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4$; б) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$; в) $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3$.

4. Розв'яжіть рівняння за допомогою заміни змінної:

а) $x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x} = 2$; б) $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2 - 8x} - 3 = 0$;

в) $x^2 - 2\sqrt{x^2 - 24} - 39 = 0$.

5. Урахуйте ОДЗ та розв'яжіть рівняння за допомогою заміни змінної:

а) $2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$; б) $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} = 4$; в) $x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} - 3 = 0$.

6. Знайдіть множину розв'язків рівняння:

а) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$; б) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$; в) $\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+1} + 2$.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння методом рівносильних перетворень:

а) $\sqrt{3+\sqrt{4-x}} = \sqrt{x+1}$; б) $\sqrt{1+x\sqrt{42+x^2}} = x+1$; в) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-34}} = x$.

2. Використайте рівносильну систему та знайдіть корені рівняння:

а) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$; б) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{x+2} + \sqrt{5x-10} = 2\sqrt{x-1}$.

3. Розв'яжіть кожне з наведених рівнянь двома способами: 1) зведенням до рівносильної системи та 2) зведенням до рівняння, що не містить різниці квадратних коренів і його рівносильної системи. Порівняйте ефективність даних підходів для кожного випадку.

а) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$;

б) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$;

в) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{2x-5}$.

4. Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

а) $\sqrt{x-3} + 6 = 5\sqrt{x-3}$;

б) $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = 2,5$;

в) $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^3 + (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2 - 2 = 0$.

5. Урахуйте ОДЗ та розв'яжіть рівняння за допомогою заміни змінної:

а) $\sqrt{x^5x} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56$;

б) $2x^{\frac{4}{3}} - 3x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20$;

в) $\frac{x^{\frac{4}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}} - 1} - \frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4$.

6. Розв'яжіть рівняння за допомогою подвійної заміни змінної:

а) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x-1} = 5$;

б) $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$;

в) $\sqrt[3]{x-4} + \sqrt{x+1} = 1$.

7. Використайте заміну змінної для розв'язання рівняння:

а) $\sqrt[3]{x-10} + \sqrt[3]{x-17} = 3$;

б) $\sqrt[3]{4x+3} - \sqrt[3]{x+2} = 1$;

в) $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$.

8. Розв'яжіть рівняння, використавши метод заміни змінної:

а) $\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+7)^2} + \sqrt[3]{(x-2)(x+7)} = 3$;

б) $\sqrt[4]{x+80} - \sqrt[4]{2-x} = 4$;

в) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$.

9. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x} = \sqrt{4-5x} + \sqrt{9+5x}$;

б) $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{8x} - \sqrt{4x+2}$;

в) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+5} + \sqrt{3x}$.

10. Розв'яжіть ірраціональні рівняння:

а) $\frac{2}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{x+6}}{x+4}$;

б) $\frac{7x-2}{\sqrt{3x-8}} = 3\sqrt{2x+3}$;

в) $\sqrt{5x-5} = \frac{4}{\sqrt{3x-2}} + \sqrt{3x-2}$.

11. Знайдіть точки перетину графіків функцій:

а) $y = \sqrt[3]{x-1}$, $y = \sqrt[6]{x+5}$;

б) $y = \sqrt{x+2}$, $y = \sqrt[3]{3x+2}$;

в) $y = \sqrt{x+3}$, $y = \sqrt[3]{x+7}$.

12. При яких значеннях параметра a рівняння є рівносильними:

- а) $\sqrt{(x+4)(x-a)} = 0, (x+4)\sqrt{x-a} = 0;$
 б) $\sqrt{(x+4)(x-a)} = 0, (x-a)\sqrt{x+4} = 0;$
 в) $x^2 + \sqrt{x+4} = a + \sqrt{x+4}, x^2 = a?$

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння методом рівносильних перетворень:
 а) $\sqrt{14+|x|} = \sqrt{x^2-16};$ б) $|x-7| = 2\sqrt{2x-8}-3;$ в) $\sqrt{4-x} = 3-|x-1|.$
2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$ двома способами. Порівняйте їхню ефективність. Чи має дане рівняння ірраціональні корені?
3. Розв'яжіть рівняння:
 а) $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9};$
 б) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}} + \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}} = \frac{1}{3};$
 в) $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2} = 12.$
4. Уведіть одну чи декілька нових змінних та розв'яжіть рівняння:
 а) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4-2x;$
 б) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2-16} - 12;$
 в) $\frac{1}{\sqrt{13-x^2}} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6}.$
5. Розв'яжіть ірраціональні рівняння, що містять параметри:
 а) $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x;$ б) $x + \sqrt{a+\sqrt{x}} = a;$ в) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x.$
6. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння має рівно один розв'язок:
 а) $\sqrt{8x-x^2-15} = ax-1;$ б) $\sqrt{4x-x^2-3} = x-a;$ в) $\sqrt{-x^2-6x-5} = ax.$

VIII. Рефлексія

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й о дну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
-
-

2)

 ?

Можливі теми проєктів

1. Різні заміни при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.
2. Кількість розв'язків у рівняннях, що містять кубічні корені.
3. Використання графіків функцій у системі координат xOa при розв'язуванні ірраціональних рівнянь, де a — параметр.
4. Використання геометричних методів при розв'язуванні рівнянь з арифметичним квадратним коренем.
5. Ірраціональні рівняння з параметром на ЗНО/НМТ.