

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 4. Урок–практикум. Розв’язування ірраціональних рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте ідею переходу до рівносильної системи для розв’язування ірраціональних рівнянь;
- 2) відпрацюєте вміння та навички розв’язання ірраціональних рівнянь;
- 3) застосуєте заміну змінної;
- 4) застосуєте подвійну заміну змінної для розв’язування складніших ірраціональних рівнянь;
- 6) застосуєте набуті знання, вміння та навички для розв’язання геометричної задачі методами алгебри.

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Розв’яжіть рівняння методом рівносильних перетворень: $\sqrt{2x+4-x^2} = x-2$.
2. Використайте рівносильну систему та знайдіть корені рівняння $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3$.
3. Розв’яжіть рівняння за допомогою заміни змінної: $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2 - 8x} - 3 = 0$.
4. Розв’яжіть ірраціональне рівняння $2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$.
5. Знайдіть множину розв’язків рівняння $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$.

Завдання для обговорення

1. Використайте рівносильну систему та знайдіть корені рівняння

$$\sqrt{x + \sqrt{x+11}} + \sqrt{x - \sqrt{x+11}} = 4.$$

Вказівка. При розв'язуванні системи, рівносильної до даного рівняння, можна скористатися нерівностями лише на етапі перевірки коренів відповідного рівняння.
2. Урахуйте ОДЗ та розв'яжіть рівняння $2x^{\frac{4}{3}} - 3x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20$ за допомогою заміни змінної.

Вказівка. Необхідно врахувати область визначення степеня з дробовим додатним показником.
3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{8x} - \sqrt{4x+2}.$

Вказівка. Перед піднесенням до квадрата варто подати рівняння у вигляді $\sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} = \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3}$, тоді рівняння зведеться до виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}.$

II. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь методами рівносильних перетворень

<i>Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов</i>		
Вид рівняння	Рівносильна система	Приклад
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 2 - x, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3} = x - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a,$ $a > 0$	$\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2 - x)} = 1, \\ x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = a,$ $a > 0$	$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = a + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + 2a\sqrt{g(x)} + a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} - \sqrt{2 - x} = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x - 2\sqrt{x(2 - x)} = 1, \\ x \geq 2 - x, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$

Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов

Вид рівняння	Рівносильна система	Приклад
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	$\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{2-x} &= \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x+2-x+2\sqrt{x(2-x)} &= \\ &= x+1, \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x+1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = h(x) + 2\sqrt{h(x) \cdot g(x)} + g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{2-x} &= \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x+2-x-2\sqrt{x(2-x)} &= \\ &= x-3, \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2-x, \\ 2-x \geq 0, \\ x-3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$

Завдання для роботи в парах

- Перейдіть до рівносильної системи та розв'яжіть рівняння
 $\sqrt{2x^2 - 5x - 4} = \sqrt{x^2 + 2x - 16}.$
- Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4.$
- Доведіть, що рівняння не має розв'язків у дійсних числах: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = \sqrt{5}.$
- Розв'яжіть рівняння $\sqrt{10-x} - \sqrt{x} = \sqrt{x-5}$ двома способами.
- Заповніть пропуски у наступному розв'язанні рівняння $\sqrt{5+\sqrt{x}} - \sqrt{5-\sqrt{x}} = 2.$
Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата і перейдемо до розгляду рівносильної системи:

$$\begin{cases} 5 + \sqrt{x} + 5 - \sqrt{x} - 2\sqrt{(5 + \sqrt{x})(5 - \sqrt{x})} = 4, \\ x \geq 0, \\ 5 - \sqrt{x} \geq 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$
 Після виконання рівносильних перетворень отримуємо систему:

$$\begin{cases} \sqrt{(5 + \sqrt{x})(5 - \sqrt{x})} = \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots \leq x \leq \dots\dots\dots \end{cases}$$
 Знову підносимо обидві частини рівняння цієї системи до квадрата:

$$\begin{cases} (5 + \sqrt{x})(5 - \sqrt{x}) = \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots \leq x \leq \dots\dots\dots \end{cases}$$

З отриманого рівняння знаходимо, що $x = \dots$, і робимо $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

Відповідь. $\dots\dots\dots$

IV. Робота в малих групах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь методом заміни

Найбільш поширеними ситуаціями для застосування заміни змінної для ірраціональних рівнянь є: 1) повторення схожих виразів зі змінною або 2) очевидний алгебричний зв'язок між підкореневими виразами.

Завдання для роботи в малих групах

1. Розв'яжіть рівняння $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} = 5$. Обговоріть відповідну заміну змінної та обмеження на її можливі значення.
2. Розв'яжіть рівняння за допомогою заміни змінної: $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$. Чи варто робити заміну на кшталт: $y = x^2 + 5x$? Чому? Запропонуйте свої варіанти заміни змінної та підтвердіть або спростуйте їхню ефективність.
3. Розв'яжіть рівняння $x^{\frac{4}{5}} - 7x^{-0,4} + \frac{6}{x} = 0$, використовуючи заміну змінної. На якому етапі розв'язання враховано приналежність змінної до ОДЗ?
4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{45 + x} - \sqrt[3]{x - 16} = 1$ двома способами: заміною змінної та піднесенням до куба із переходом до рівняння-наслідку. Порівняйте ефективність даних методів.
5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x - 4} = 1 - \sqrt{x + 1}$ за допомогою подвійної заміни змінної. Яку систему, рівносильну до початкового рівняння, ви отримали? Чи існує лише один варіант такої системи? Чому ви так вважаєте?

V. Самостійна робота

1. Знайдіть найбільший дільник кореня рівняння $\sqrt{\sqrt{x^2 - 16} + x} = 2$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

2. Обчисліть суму коренів рівняння $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{2 + x}$.

А	Б	В	Г	Д
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	інша відповідь

3. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 3x + 2 = 2\sqrt{x^2 + 3x + 5}$.

А	Б	В	Г	Д
-1; 1	-1; 3	1; -4	-1; 3	рівняння не має дійсних коренів

4. Скільки дійсних коренів має рівняння $\sqrt{\frac{x-3}{5-x}} + \sqrt{\frac{5-x}{x-3}} = 2$?

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	безліч	жодного

5. Якому проміжку належать корені рівняння $\sqrt[3]{2x-8} + \sqrt[3]{x-8} = 2$?

А	Б	В	Г	Д
(0; 3)	(3; 6)	(6; 9)	(9; 12)	жодному з наведених

VI. Розв'язання геометричної задачі

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** Два кола, радіуси яких відрізняються на 1 см, перетинаються. Відстань між їхніми центрами дорівнює $\sqrt{6} - 1$ см. Знайдіть радіуси даних кіл, якщо їхня спільна хорда дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

Рефлексія

- Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- Найскладнішим для мене було
- Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності

6) Найбільше мені сподобалося

.....

.....

Можливі теми проєктів

1. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt{ax+b} = \sqrt{cx+d}$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d . Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
2. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt{ax+b} = cx+d$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d . Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
3. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = e$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d, e . Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
4. Дано рівняння $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$ і два способи його розв'язання. Яких частин розв'язання не вистачає у кожному способі? Доведіть кожне розв'язання до завершення.

Перший спосіб. Зробимо подвійну заміну змінної: $a = \sqrt[3]{54+\sqrt{x}}$; $b = \sqrt[3]{54-\sqrt{x}}$. Тоді дане рівняння зводиться до системи:

$$\begin{cases} a+b = \sqrt[3]{18}, \\ a^3+b^3 = 108. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему: $\begin{cases} a+b = \sqrt[3]{18}, \\ (a+b)(a^2-ab+b^2) = 6 \cdot 18; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \sqrt[3]{18}-a, \\ a^2-ab+b^2 = 6 \cdot \sqrt[3]{18^2}; \end{cases}$

$$\begin{cases} b = \sqrt[3]{18}-a, \\ a^2-a(\sqrt[3]{18}-a)+(\sqrt[3]{18}-a)^2 = 6 \cdot \sqrt[3]{18^2}; \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

Відповідь. $x = 4416$.

Другий спосіб. Піднесемо обидві частини рівняння до куба і виконаємо перетворення: $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$;

$$54+\sqrt{x}+54-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}}\right) = 18;$$

$$108+3\sqrt[3]{2916-x} \cdot \sqrt[3]{18} = 18;$$

.....

.....

.....

.....
.....
.....
Відповідь. $x = 4416$.







