

10

Тема 3.

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 4. Урок–практикум. Розв'язування ірраціональних рівнянь

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь методами рівносильних перетворень.
3. Робота в малих групах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь методом заміни.
4. Самостійна робота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює їхнє застосування, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку — формування стійких умінь та навичок щодо розв'язування типових ірраціональних рівнянь.
- 2) Додаткова мета уроку — формування умінь розв'язувати більш складні ірраціональні рівняння.

- 3) Важливо постійно акцентувати увагу при розв'язанні рівнянь на використання та зміст понять ОДЗ, рівносильні перетворення, рівносильні системи рівнянь.
- 4) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 5) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що – додатковою.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Два кола, радіуси яких відрізняються на 1 см, перетинаються. Відстань між їхніми центрами дорівнює $\sqrt{6} - 1$ см. Знайдіть радіуси даних кіл, якщо їхня спільна хорда дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

I. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Розв'яжіть рівняння методом рівносильних перетворень: $\sqrt{2x+4-x^2} = x-2$.
 2. Використайте рівносильну систему та знайдіть корені рівняння $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3$.
 3. Розв'яжіть рівняння за допомогою заміни змінної: $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2 - 8x} - 3 = 0$.
 4. Розв'яжіть ірраціональне рівняння $2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$.
 5. Знайдіть множину розв'язків рівняння $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$.
- Відповіді.* 1) 3; 2) 4; 3) -1; 9; 4) 1; 5) {-15; 13}.

Примітка. Обговоріть фронтально деякі задачі домашнього завдання. За необхідності, використовуйте опитування біля дошки або інші форми роботи.

Завдання для обговорення

1. Використайте рівносильну систему та знайдіть корені рівняння $\sqrt{x + \sqrt{x+11}} + \sqrt{x - \sqrt{x+11}} = 4$.
Вказівка. При розв'язуванні системи, рівносильної до даного рівняння, можна скористатися нерівностями лише на етапі перевірки коренів відповідного рівняння.
Відповідь. 5.
2. Урахуйте ОДЗ та розв'яжіть рівняння $2x^{\frac{4}{3}} - 3x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20$ за допомогою заміни змінної.
Вказівка. Необхідно врахувати область визначення степеня з дробовим додатним показником.
Відповідь. 8.
3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{8x} - \sqrt{4x+2}$.
Вказівка. Перед піднесенням до квадрата варто подати рівняння у вигляді $\sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} = \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3}$, тоді рівняння зведеться до виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.
Відповідь. 0,5.

II. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь методами рівносильних перетворень

<i>Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов</i>		
Вид рівняння	Рівносильна система	Приклад
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 2 - x, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3} = x - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a,$ $a > 0$	$\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2 - x)} = 1, \\ x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = a,$ $a > 0$	$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = a + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = g(x) + 2a\sqrt{g(x)} + a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} - \sqrt{2 - x} = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x - 2\sqrt{x(2 - x)} = 1, \\ x \geq 2 - x, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	$\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2 - x)} = \\ = x + 1, \\ x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0, \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$

Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов		
Вид рівняння	Рівносильна система	Приклад
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = h(x) + 2\sqrt{h(x) \cdot g(x)} + g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x + 2 - x - 2\sqrt{x(2-x)} = \\ = x - 3, \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 - x, \\ 2 - x \geq 0, \\ x - 3 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$

Завдання для роботи в парах

1. Перейдіть до рівносильної системи та розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x^2 - 5x - 4} = \sqrt{x^2 + 2x - 16}$.
2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4$.
3. Доведіть, що рівняння не має розв'язків у дійсних числах: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = \sqrt{5}$.
4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{10-x} - \sqrt{x} = \sqrt{x-5}$ двома способами.
5. Заповніть пропуски у наступному розв'язанні рівняння $\sqrt{5+\sqrt{x}} - \sqrt{5-\sqrt{x}} = 2$.
Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата і перейдемо до розгляду рівносильної системи:

$$\begin{cases} 5 + \sqrt{x} + 5 - \sqrt{x} - 2\sqrt{(5 + \sqrt{x})(5 - \sqrt{x})} = 4, \\ x \geq 0, \\ 5 - \sqrt{x} \geq 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Після виконання рівносильних перетворень отримуємо систему:

$$\begin{cases} \sqrt{(5 + \sqrt{x})(5 - \sqrt{x})} = \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots \leq x \leq \dots\dots\dots \end{cases}$$

Знову підносимо обидві частини рівняння цієї системи до квадрата:

$$\begin{cases} (5 + \sqrt{x})(5 - \sqrt{x}) = \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots \leq x \leq \dots\dots\dots \end{cases}$$

З отриманого рівняння знаходимо, що $x = \dots$, і робимо $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

Відповідь. $\dots\dots\dots$

III. Робота в малих групах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь методом заміни

Найбільш поширеними ситуаціями для застосування заміни змінної для ірраціональних рівнянь є: 1) повторення схожих виразів зі змінною або 2) очевидний алгебричний зв'язок між підкореновими виразами.

Завдання для роботи в малих групах

1. Розв'яжіть рівняння $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} = 5$. Обговоріть відповідну заміну змінної та обмеження на її можливі значення.
2. Розв'яжіть рівняння за допомогою заміни змінної: $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$. Чи варто робити заміну на кшталт: $y = x^2 + 5x$? Чому? Запропонуйте свої варіанти заміни змінної та підтвердіть або спростуйте їхню ефективність.
3. Розв'яжіть рівняння $x^{\frac{4}{5}} - 7x^{-0,4} + \frac{6}{x} = 0$, використовуючи заміну змінної. На якому етапі розв'язання враховано приналежність змінної до ОДЗ?
4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{45 + x} - \sqrt[3]{x - 16} = 1$ двома способами: заміною змінної та піднесенням до куба із переходом до рівняння-наслідку. Порівняйте ефективність даних методів.
5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x - 4} = 1 - \sqrt{x + 1}$ за допомогою подвійної заміни змінної. Яку систему, рівносильну до початкового рівняння, ви отримали? Чи існує лише один варіант такої системи? Чому ви так вважаєте?

IV. Самостійна робота

1. Знайдіть найбільший дільник кореня рівняння $\sqrt{\sqrt{x^2 - 16} + x} = 2$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

2. Обчисліть суму коренів рівняння $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{2 + x}$.

А	Б	В	Г	Д
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	інша відповідь

3. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 3x + 2 = 2\sqrt{x^2 + 3x + 5}$.

А	Б	В	Г	Д
-1; 1	-1; 3	1; -4	-1; 3	рівняння не має дійсних коренів

4. Скільки дійсних коренів має рівняння $\sqrt{\frac{x-3}{5-x}} + \sqrt{\frac{5-x}{x-3}} = 2$?

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	безліч	жодного

5. Якому проміжку належать корені рівняння $\sqrt[3]{2x-8} + \sqrt[3]{x-8} = 2$?

А	Б	В	Г	Д
(0; 3)	(3; 6)	(6; 9)	(9; 12)	жодному з наведених

V. Розв'язання геометричної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Два кола, радіуси яких відрізняються на 1 см, перетинаються. Відстань між їхніми центрами дорівнює $\sqrt{6} - 1$ см. Знайдіть радіуси даних кіл, якщо їхня спільна хорда дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

Розв'язання. Виконаємо рисунок (перший випадок) відповідно до умови та будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього.

Нехай $AB = x$ (см), тоді $CB = x + 1$ (см).

Оскільки спільна хорда двох кіл перпендикулярна до лінії центра та ділиться нею навпіл, то BD є висотою трикутника ABC і $BD = \sqrt{3}$ (см).

Використаємо теорему Піфагора в трикутниках ABD та CBD :

$$AD = \sqrt{x^2 - 3}, \quad CD = \sqrt{(x+1)^2 - 3}.$$

Якщо центри даних кіл лежать по різні боки від спільної хорди, то $AD + DC = AC$, тоді отримаємо рівняння $\sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{(x+1)^2 - 3} = \sqrt{6} - 1$.

Оскільки x є додатним числом, то, виходячи з ОДЗ, $x \geq \sqrt{3}$.

$$\text{Тоді } \sqrt{(x+1)^2 - 3} \geq \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 - 3} = \sqrt{2\sqrt{3}+1} > \sqrt{6} - 1.$$

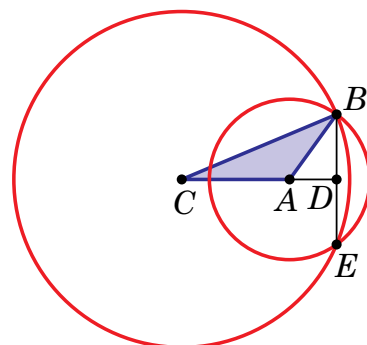
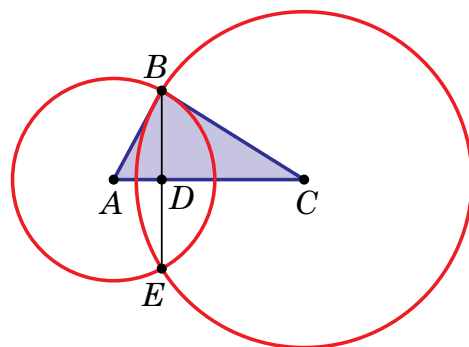
Звідси отримуємо, що ліва частина рівняння більша за праву, і рівняння не має розв'язків у додатних числах.

Якщо центри кіл лежать по один бік від спільної хорди (другий випадок), то отримаємо рівняння

$$\sqrt{(x+1)^2 - 3} - \sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{6} - 1.$$

Перенесемо другий доданок у праву частину рівняння, піднесемо обидві частини отриманого рівняння до квадрата і перейдемо до рівносильної системи, з урахуванням, що x є додатним числом:

$$\sqrt{(x+1)^2 - 3} = \sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{6} - 1,$$



$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - 3 = x^2 - 3 + (\sqrt{6} - 1)^2 + 2(\sqrt{6} - 1)\sqrt{x^2 - 3}, \\ x \geq \sqrt{3}. \end{cases}$$

Виконаємо рівносильні перетворення та знову піднесемо обидві частини рівняння системи до квадрата:

$$\begin{cases} 2x - 6 + 2\sqrt{6} = 2(\sqrt{6} - 1)\sqrt{x^2 - 3}, \\ x \geq \sqrt{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 36 + 24 - 24x + 8\sqrt{6}x - 24\sqrt{6} = 4(7 - 2\sqrt{6})(x^2 - 3), \\ x \geq \sqrt{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6 - 2\sqrt{6})x^2 + (6 - 2\sqrt{6})x + (-36 + 12\sqrt{6}) = 0, \\ x \geq \sqrt{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x \geq \sqrt{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ x = 2, \\ x \geq \sqrt{3}. \end{cases}$$

Остаточно отримуємо, що $x = 2$.

Таким чином, кола, з умови задачі, мають радіуси 2 см та 3 см.

Відповідь. 2см; 3 см.

Висновок. Основним методом при розв'язанні ірраціональних рівнянь з квадратним коренем є піднесення обох частин рівняння до квадрата. Але слід пам'ятати, що для створення рівносильної системи в неї треба включити ОДЗ рівняння та невід'ємність обох його частин. Також ефективним методом у багатьох ситуаціях є заміна змінної.

VI. Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було

- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

1. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt{ax+b} = \sqrt{cx+d}$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d . Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
2. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt{ax+b} = cx+d$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d . Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
3. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = e$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d, e . Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
4. Дано рівняння $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$ і два способи його розв'язання. Яких частин розв'язання не вистачає у кожному способі? Доведіть кожне розв'язання до завершення.

Перший спосіб. Зробимо подвійну заміну змінної: $a = \sqrt[3]{54+\sqrt{x}}$; $b = \sqrt[3]{54-\sqrt{x}}$. Тоді дане рівняння зводиться до системи:

$$\begin{cases} a+b = \sqrt[3]{18}, \\ a^3+b^3 = 108. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему: $\begin{cases} a+b = \sqrt[3]{18}, \\ (a+b)(a^2-ab+b^2) = 6 \cdot 18; \end{cases} \begin{cases} b = \sqrt[3]{18}-a, \\ a^2-ab+b^2 = 6 \cdot \sqrt[3]{18^2}; \end{cases}$

$$\begin{cases} b = \sqrt[3]{18}-a, \\ a^2-a(\sqrt[3]{18}-a)+(\sqrt[3]{18}-a)^2 = 6 \cdot \sqrt[3]{18^2}; \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

Відповідь. $x = 4416$.

Другий спосіб. Піднесемо обидві частини рівняння до куба і виконаємо перетворення: $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$;

$$54+\sqrt{x}+54-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}}\right) = 18;$$

$$108+3\sqrt[3]{2916-x} \cdot \sqrt[3]{18} = 18;$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Відповідь. $x = 4416$.