

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 5. Системи ірраціональних рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите означення системи ірраціональних рівнянь та її ОДЗ;
- 2) пригадаєте, що означає розв'язати систему рівнянь;
- 3) вивчите основні алгебричні перетворення, які використовуються при розв'язанні систем ірраціональних рівнянь;
- 4) вивчите метод заміни змінних при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь;
- 6) застосуєте набуті знання для розв'язування задачі геометричного змісту.

II. Повторення

1. Укажіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 73. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(4; 1)	(8; -3)	(1; -4)	(4; -1)	(1; 4)

2. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - 3y = 11? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	жодного	безліч

3. Нехай $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + y^2 = 37. \end{cases}$ Знайдіть значення добутку $x_0 y_0$.

А	Б	В	Г	Д
-6	-5	6	$2\sqrt{2}$	-6; 6

4. Знайдіть ОДЗ рівняння $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$x \in \mathbb{R}, y \in [0; +\infty)$	$x \in [0; +\infty), y \in \mathbb{R}$	$x \in [0; +\infty), y \in [0; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$	інша відповідь

5. Оберіть рівняння з двома змінними, для якого розв'язком є пара чисел $(1; -1)$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{x} + \sqrt{y} = 0$	$\sqrt[3]{y} + \sqrt{x} = 0$	$y^{\frac{2}{3}} = x$	$\frac{2x-1}{1-2x} + y = 0$	$\sqrt{xy} = -1$

III. Означення систем ірраціональних рівнянь

Означення. Системою ірраціональних рівнянь назвемо систему, одне або декілька рівнянь якої є ірраціональними, а решта — раціональними (або усі рівняння якої є ірраціональними).

Означення. Розв'язком системи ірраціональних рівнянь є такий набір чисел, що при підстановці його замість відповідних змінних усі рівняння системи перетворюються на правильні рівності.

Означення. Розв'язати систему ірраціональних рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх не існує.

Так само, як і для ірраціональних рівнянь, важливу роль при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь відіграє ОДЗ (область допустимих значень), тобто множина значень змінних, при яких усі рівняння системи мають сенс, тобто всі дії в них можна коректно виконати.

Примітка. Для коренів парного степеня підкореневі вирази мають бути невід'ємними.

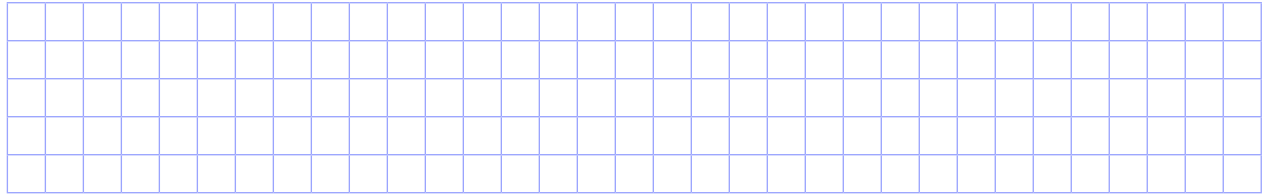
Основа степеня з дробовим додатним показником має бути **невід'ємним** числом.

Як і при розв'язанні інших типів систем рівнянь, часто потрібно виконати деякі алгебричні перетворення. При цьому можуть виникати системи або рівняння двох типів: *рівносильні даній в умові системі* (мають таку саму множину розв'язків, як і початкова) і *наслідки* (множина їхніх розв'язків складається з усіх розв'язків початкової системи і деяких інших наборів чисел — сторонніх розв'язків). Сторонні розв'язки можна

відкинути перевіркою — підстановкою у початкову систему. Зайвих перетворень часто можна уникнути, якщо звертати увагу на ОДЗ даної системи ірраціональних рівнянь.

Приклад 1. Знайдіть область допустимих значень системи ірраціональних рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{4-y} = 5, \\ \sqrt{x-3} - \sqrt{4-y} = 3. \end{cases}$$



IV. Методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь

При розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь використовують як загальні методи розв'язування систем рівнянь, так і специфічні методи для розв'язування ірраціональних рівнянь.

У будь-якому разі, варто звертати увагу на те, чи виконувалися лише рівносильні перетворення, чи на якомусь етапі отримані наслідки (у такому разі треба робити перевірку).

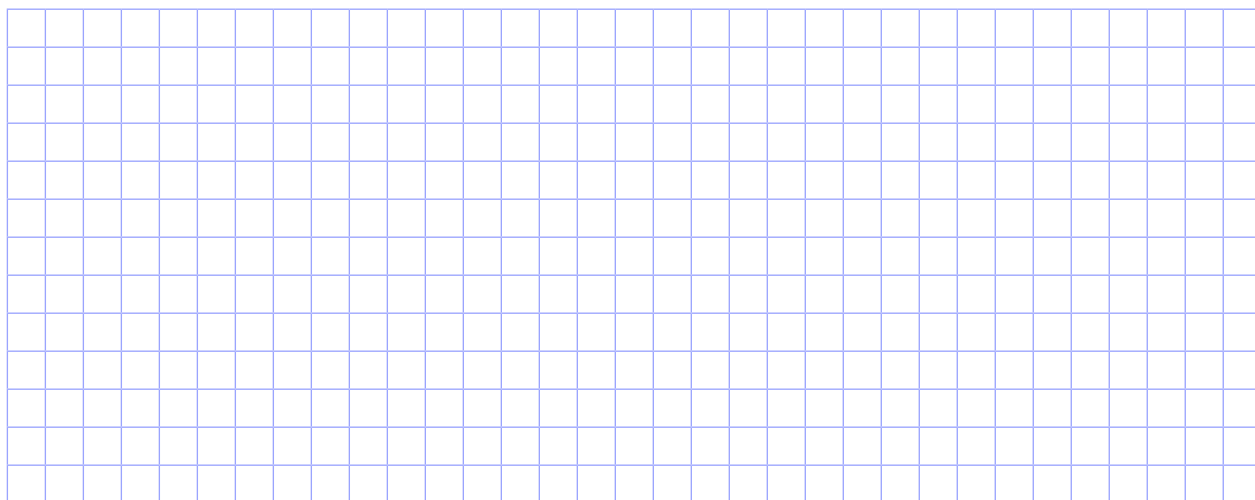
<i>Деякі методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь</i>		
Метод	Приклад	Розв'язання
Додавання або віднімання рівнянь системи	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{4-y} = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{4-y} = 3. \end{cases}$	Додамо та віднімемо рівняння системи: $\begin{cases} 2\sqrt{x} = 5 + 3, \\ 2\sqrt{4-y} = 5 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16, \\ y = 3. \end{cases}$
Множення або ділення рівнянь системи	$\begin{cases} \sqrt{xy} = 6, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{3}. \end{cases}$	До ОДЗ входять пари чисел $(x; y)$ таких, що або обидва додатні, або обидва від'ємні. Перемножимо та поділимо рівняння системи: $\begin{cases} \sqrt{x^2} = 6 \cdot \frac{2}{3}, \\ \sqrt{y^2} = 6 : \frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4, \\ y = \pm 9. \end{cases}$ Із урахуванням ОДЗ маємо дві відповіді: $(-4; -9)$ та $(4; 9)$.
Підстановка	$\begin{cases} x + y = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2 - x, \\ \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x + 2 - x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{2-x} = 4, \\ x \in [0; 2]; \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x \cdot (2 - x) = 1, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x^2 - 2x + 1 = 0, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$

Деякі методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь

Метод	Приклад	Розв'язання
Заміна змінних	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$	Заміна: $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$. Маємо: $\begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a(4 - a) = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a^2 - 4a + 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, b = 1, \\ a = 1, b = 3. \end{cases}$ Для початкових змінних: $\begin{cases} \sqrt{x} = 3, \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} = 1, \sqrt{y} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, y = 1, \\ x = 1, y = 9. \end{cases}$

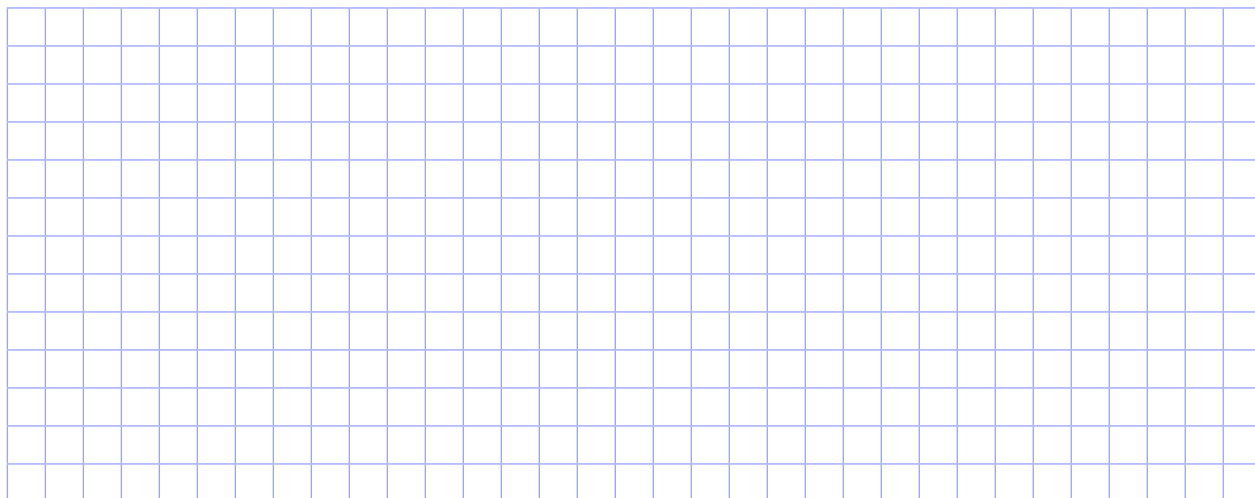
Приклад 2.

Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1, \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4. \end{cases}$$



Приклад 3.

Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 6, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3. \end{cases}$$



V. Розв'язання геометричної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У прямокутному трикутнику провели найменшу висоту завдовжки 12 см. Відомо, що сума катетів дорівнює 35 см. Знайдіть площу трикутника.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+y} = 5, \\ x+y=4; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+y} = 7, \\ x-y=2; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \sqrt{2y} + \sqrt{14x+y} = 6, \\ y=2x. \end{cases} \end{array}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання або віднімання:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{x} - 5\sqrt{y} = -9; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-y} = 3, \\ 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-y} = 3; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x+2y} = 6, \\ \sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x+2y} = 8. \end{cases} \end{array}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом множення або ділення, з урахуванням ОДЗ:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 5, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 20; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x-y} = 2, \\ \frac{\sqrt[3]{x-y}}{2\sqrt[3]{x}} = 0,25; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \sqrt{x}(1 + \sqrt[4]{y}) = 6, \\ \sqrt{x}(3 + \sqrt[4]{y}) = 8. \end{cases} \end{array}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи метод заміни змінної в одному з рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt{x+y} - 2\sqrt[4]{x+y} = 3, \\ 2x+3y=203; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[6]{x-y} = 3, \\ \sqrt[3]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} = -2; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{x+y+3} + x+y = 17. \end{cases} \end{array}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи метод заміни змінної:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+xy} = 3, \\ x+y+x^2+xy=5; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y} = 1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases} \end{array}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt[3]{x-y+27} = 3, \\ \sqrt{2x-y+2} = x; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ \sqrt{x-3y} + \sqrt{x+5y} = 4; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases} \end{array}$$

Рівень В

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x+y=28; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt{x} = 12, \\ xy=64; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases} \end{array}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{xy} = 3; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1, \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{xy} = 19; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35. \end{cases} \end{array}$$

3. Знайдіть множину розв'язків системи рівнянь, використовуючи заміну змінних:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ x + y = 17; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x + \sqrt{y} = 56, \\ \sqrt{x} + y = 56; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{2y-5x} = x, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{2y-5x} = y. \end{cases} \end{array}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи заміну змінних:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt[3]{x+y+4} + \sqrt[3]{y+7} = 4, \\ x+2y = 5; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x+y = 7; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x+2y = 23. \end{cases} \end{array}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1, \\ 3x+2y = 4; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt{4-x+y} + \sqrt{9-2x+y} = 7, \\ 2y-3x = 12; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{x^2+5} + \sqrt{y^2-5} = 5, \\ x^2+y^2 = 13. \end{cases} \end{array}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи метод множення або ділення:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt{\frac{108x}{5y}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{20y}{3x}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt{\frac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases} \end{array}$$

7. Розв'яжіть систему рівнянь із використанням заміни змінних:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y} = \sqrt{x+y-4}; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 9x^2 + \sqrt{9x^2+2y+1} = 1-2y, \\ 6x+y = 2; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2+4x+y^2-3y = 0. \end{cases} \end{array}$$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} \frac{3}{2-\sqrt{x-y}} + \frac{10}{2+\sqrt{x+y}} = 5, \\ \frac{4}{2-\sqrt{x-y}} - \frac{5}{2+\sqrt{x+y}} = 3; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{xy}, \\ x+y = 5; \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 14, \\ \sqrt{\frac{x+y}{8}} - \sqrt{\frac{x-y}{12}} = 3. \end{cases} & \end{array}$$

9. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 3, \\ \sqrt{(x-y)^2} = 1; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right)^2} = 1,6, \\ xy = 2; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2} = \frac{5}{2}, \\ \sqrt{(x+y)^2} = 5. \end{cases} \end{array}$$

10. Розв'яжіть систему рівнянь, попередньо використавши рівносильні перетворення з урахуванням ОДЗ:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} x-y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}, \\ x^2+y^2 = 34; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x-y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{12}{x+y}, \\ x^2+y^2 = 41; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}} + \sqrt{y+\frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2+1)y + (y^2+1)x = 4xy. \end{cases} \end{array}$$

- 11.** Розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь, що містять змінну у степені з дробовим показником:

$$\text{а) } \begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{2}} + (x-y)^{\frac{1}{3}} = 6, \\ ((x+y)^3 (x-y)^2)^{\frac{1}{6}} = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = 0,5(xy)^{\frac{1}{2}}, \\ x+y=5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x} + y^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{y} = 1\frac{1}{2}, \\ xy = 64. \end{cases}$$

- 12.** Розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь, що містять параметри:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x+a}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x+a}} = 2, \\ x+y = xy+a; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4a, \\ x-y = 8a^2. \end{cases}$$

Рівень С

- 1.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1. \end{cases}$
- 2.** Використовуючи нерівність трикутника та формулу відстані між точками у декартовій системі координат, розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+2y=6, \\ \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2} = 5. \end{cases}$
- 3.** Використовуючи нерівність багатокутника для векторів на площині, розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y+z+t=8, \\ \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2} = 6. \end{cases}$
- 4.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} + \sqrt{x-3y} = 4, \\ 2x+3y=17 \end{cases}$ заміною змінних.
- 5.** Розв'яжіть систему трьох ірраціональних рівнянь з трьома змінними: $\begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y} + \sqrt{z+4} = 6, \\ 2\sqrt{x-4} - \sqrt{y} - 4\sqrt{z+4} = -12, \\ x+y+z=14. \end{cases}$
- 6.** Розв'яжіть систему рівнянь з параметрами a та b : $\begin{cases} \sqrt{\frac{ax+by}{bx+ay}} + \sqrt{\frac{bx+ay}{ax+by}} = 2, \\ \sqrt{\frac{x+1}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} = 2,5. \end{cases}$

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Жахливі Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
.....
.....
- 2)
.....
.....
- ?
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Геометричні задачі, що призводять до систем ірраціональних рівнянь.
- 2.** Системи ірраціональних рівнянь на математичних олімпіадах школярів України.
- 3.** Використання нерівностей при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь.
- 4.** Узагальніть розв'язання завдань 2 і 3 рівня С. Складіть алгоритм розв'язання та продемонструйте його роботу на конкретних прикладах.
- 5.** Використання графіків функцій при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь.

