

10

Тема 3.

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 5. Системи ірраціональних рівнянь

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення систем ірраціональних рівнянь.
2. Методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте геометричну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання геометричної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання геометричних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Які рівняння називають ірраціональними?

2) Що називається системою рівнянь? Розв'язком системи рівнянь?

3) Які методи розв'язування систем рівнянь ви знаєте?

4) Що таке ОДЗ ірраціонального рівняння?

5) В якій ситуації при розв'язуванні ірраціонального рівняння треба робити перевірку? Як саме?

II. Повторення

1. Укажіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 73. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(4; 1)	(8; -3)	(1; -4)	(4; -1)	(1; 4)

2. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - 3y = 11? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	жодного	безліч

3. Нехай $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + y^2 = 37. \end{cases}$ Знайдіть значення добутку $x_0 y_0$.

А	Б	В	Г	Д
-6	-5	6	$2\sqrt{2}$	-6; 6

4. Знайдіть ОДЗ рівняння $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$x \in \mathbb{R}, y \in [0; +\infty)$	$x \in [0; +\infty), y \in \mathbb{R}$	$x \in [0; +\infty), y \in [0; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$	інша відповідь

5. Оберіть рівняння з двома змінними, для якого розв'язком є пара чисел $(1; -1)$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{x} + \sqrt{y} = 0$	$\sqrt[3]{y} + \sqrt{x} = 0$	$y^{\frac{2}{3}} = x$	$\frac{2x-1}{1-2x} + y = 0$	$\sqrt{xy} = -1$

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** У прямокутному трикутнику провели найменшу висоту завдовжки 12 см. Відомо, що сума катетів дорівнює 35 см. Знайдіть площу трикутника.

III. Означення систем ірраціональних рівнянь

Означення. Системою ірраціональних рівнянь назвемо систему, одне або декілька рівнянь якої є ірраціональними, а решта — раціональними (або усі рівняння якої є ірраціональними).

Означення. Розв'язком системи ірраціональних рівнянь є такий набір чисел, що при підстановці його замість відповідних змінних усі рівняння системи перетворюються на правильні рівності.

Означення. Розв'язати систему ірраціональних рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх не існує.

Так само, як і для ірраціональних рівнянь, важливу роль при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь відіграє ОДЗ (область допустимих значень), тобто множина значень змінних, при яких усі рівняння системи мають сенс, тобто всі дії в них можна коректно виконати.

Примітка. Для коренів парного степеня підкореневі вирази мають бути невід'ємними.

Основа степеня з дробовим додатним показником має бути **невід'ємним** числом.

Як і при розв'язанні інших типів систем рівнянь, часто потрібно виконати деякі алгебричні перетворення. При цьому можуть виникати системи або рівняння двох типів: *рівносильні даній в умові системі* (мають таку саму множину розв'язків, як і початкова) і *наслідки* (множина їхніх розв'язків складається з усіх розв'язків початкової системи і деяких інших наборів чисел — сторонніх розв'язків). Сторонні розв'язки можна відкинути перевіркою — підстановкою у початкову систему. Зайвих перетворень часто можна уникнути, якщо звертати увагу на ОДЗ даної системи ірраціональних рівнянь.

Ілюстративні приклади

6. Знайдіть область допустимих значень системи ірраціональних рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{4-y} = 5, \\ \sqrt{x-3} - \sqrt{4-y} = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки у рівнянні змінні присутні під знаком квадратного кореня (парного степеня), то всі підкореневі вирази мають бути невід'ємними:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ 4-y \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ y \leq 4. \end{cases}$$

Отже, ОДЗ даної системи рівнянь: $x \in [3; +\infty), y \in (-\infty; 4]$.

Відповідь. $x \in [3; +\infty), y \in (-\infty; 4]$

7. Чи є рівносильними системи рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{xy} = 4 \end{cases}$ і $\begin{cases} x - 2\sqrt{xy} + y = 9, \\ \sqrt{xy} = 4 \end{cases}$?

Розв'язання. Дані системи не є рівносильними, оскільки пара чисел (1; 16) є розв'язком другої системи, але не є розв'язком першої.

Дійсно:

$$\begin{cases} 1 - 2\sqrt{16} + 16 = 9, \\ \sqrt{16} = 4 \end{cases} \text{ — рівності виконуються, але } \begin{cases} \sqrt{1} - \sqrt{16} = 4, \\ \sqrt{16} = 4 \end{cases} \text{ — не виконуються.}$$

Відповідь. Ні.

IV. Методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь

При розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь використовують як загальні методи розв'язування систем рівнянь, так і специфічні методи для розв'язування ірраціональних рівнянь.

У будь-якому разі, варто звертати увагу на те, чи виконувалися лише рівносильні перетворення, чи на якомусь етапі отримані наслідки (у такому разі треба робити перевірку).

<i>Деякі методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь</i>		
Метод	Приклад	Розв'язання
Додавання або віднімання рівнянь системи	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{4-y} = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{4-y} = 3. \end{cases}$	Додамо та віднімемо рівняння системи: $\begin{cases} 2\sqrt{x} = 5 + 3, \\ 2\sqrt{4-y} = 5 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16, \\ y = 3. \end{cases}$

Деякі методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь		
Метод	Приклад	Розв'язання
Множення або ділення рівнянь системи	$\begin{cases} \sqrt{xy} = 6, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{3}. \end{cases}$	До ОДЗ входять пари чисел $(x; y)$ таких, що або обидва додатні, або обидва від'ємні. Перемножимо та поділимо рівняння системи: $\begin{cases} \sqrt{x^2} = 6 \cdot \frac{2}{3}, \\ \sqrt{y^2} = 6 : \frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4, \\ y = \pm 9. \end{cases}$ Із урахуванням ОДЗ маємо дві відповіді: $(-4; -9)$ та $(4; 9)$.
Підстановка	$\begin{cases} x + y = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2 - x, \\ \sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x + 2 - x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{2 - x} = 4, \\ x \in [0; 2]; \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x \cdot (2 - x) = 1, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x^2 - 2x + 1 = 0, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$
Заміна змінних	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$	Заміна: $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$. Маємо: $\begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a(4 - a) = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a^2 - 4a + 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, b = 1, \\ a = 1, b = 3. \end{cases}$ Для початкових змінних: $\begin{cases} \sqrt{x} = 3, \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} = 1, \sqrt{y} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, y = 1, \\ x = 1, y = 9. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1, \\ \sqrt{5x + y} + \sqrt{5x - y} = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо перше рівняння системи за допомогою заміни змінної

$$a = \sqrt{\frac{y}{x}} : a - \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0, \text{ звідки } a = 2 \text{ або } a = -1.$$

1) $a = 2$. Система перетворюється на наступну:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} = 2, \\ \sqrt{5x + y} + \sqrt{5x - y} = 4. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом підстановки:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 4, \\ \sqrt{5x + y} + \sqrt{5x - y} = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x, \\ \sqrt{5x + 4x} + \sqrt{5x - 4x} = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x, \\ 3\sqrt{x} + \sqrt{x} = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = 1. \end{cases}$$

2) $a = -1$. Система перетворюється на наступну:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} = -1, \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4. \end{cases}$$

Оскільки арифметичний квадратний корінь у дійсних числах набуває лише невід'ємних значень, то перше рівняння системи не має розв'язків. Отже, і вся система не має розв'язків.

Відповідь. (1; 4).

9. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 6, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. В обох рівняннях системи виконаємо заміну: $\sqrt[4]{x} = a$, $\sqrt[4]{y} = b$.

Маємо
$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 6, \\ a + b = 3. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему методом підстановки:

$$\begin{cases} a^2 + 2(3-a)^2 = 6, \\ b = 3-a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 18 - 12a + 2a^2 = 6, \\ b = 3-a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 4 = 0, \\ b = 3-a. \end{cases}$$

Звідси $a = 2$, $b = 1$.

Для початкових змінних:
$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} = 2, \\ \sqrt[4]{y} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16, \\ y = 1. \end{cases}$$

Відповідь. (16; 1).

10. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Виконаємо рівносильні перетворення першого рівняння:

$$\begin{aligned} x + y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 &\Leftrightarrow \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} \right) - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) - 2 = 0. \end{aligned}$$

Розв'яжемо це рівняння за допомогою заміни змінної $\sqrt{x} - \sqrt{y} = a$: $a^2 - a - 2 = 0$, звідки $a = 2$ або $a = -1$.

1) Якщо $a = 2$, то маємо систему
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом додавання та віднімання:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} = 2 + 8, \\ 2\sqrt{y} = 8 - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25, \\ y = 9. \end{cases}$$

2) Якщо $a = -1$, то маємо систему
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = -1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом додавання та віднімання:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} = -1 + 8, \\ 2\sqrt{y} = 8 - (-1); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{49}{4}, \\ y = \frac{81}{4}. \end{cases}$$

Відповідь. $(25; 9), \left(\frac{49}{4}; \frac{81}{4}\right)$.

V. Розв'язання геометричної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

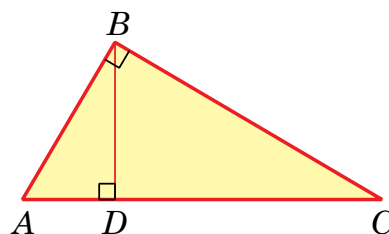
Задача. У прямокутному трикутнику провели найменшу висоту завдовжки 12 см. Відомо, що сума катетів дорівнює 35 см. Знайдіть площу трикутника.

Розв'язання. Зробимо рисунок відповідно до умови та будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього.

Нехай $AB = x$ (см), тоді $BC = y$ (см). Оскільки більшій стороні відповідає більша проекція, то висота $BD = 12$ см є найменшою.

Використовуючи теорему Піфагора в трикутнику ABC ,

маємо: $AC = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Обчислимо площу трикутника ABC двома способами: $S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$.

Отримаємо систему ірраціональних рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 35, \\ xy = 12\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Виконаємо рівносильні перетворення й отримаємо:
$$\begin{cases} x + y = 35, \\ xy = 12\sqrt{(x + y)^2 - 2xy}. \end{cases}$$

Зробимо заміну змінних: $a = x + y$, $b = xy$. Тоді система зводиться до наступної:

$$\begin{cases} a = 35, \\ b = 12\sqrt{a^2 - 2b}. \end{cases}$$

Із урахуванням, що b є числом додатним, отримуємо:

$$\begin{cases} a = 35, \\ b^2 = 144 \cdot (1225 - 2b); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 35, \\ b^2 + 288b - 176400 = 0; \end{cases} \text{ звідки } b = 300.$$

Таким чином, $x + y = 35$, $xy = 300$.

Отже, площа трикутника дорівнює $S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot 300 = 150$ (см²).

Зауваження. Легко отримати, що катети даного трикутника дорівнюють 15 см та 20 см.

Відповідь. 150 см².

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+y} = 5, \\ x+y = 4; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+y} = 7, \\ x-y = 2; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{2y} + \sqrt{14x+y} = 6, \\ y = 2x. \end{cases} \end{array}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання або віднімання:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{x} - 5\sqrt{y} = -9; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-y} = 3, \\ 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-y} = 3; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x+2y} = 6, \\ \sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x+2y} = 8. \end{cases} \end{array}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом множення або ділення, з урахуванням ОДЗ:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 5, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 20; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x-y} = 2, \\ \frac{\sqrt[3]{x-y}}{2\sqrt[3]{x}} = 0,25; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{x}(1 + \sqrt[4]{y}) = 6, \\ \sqrt{x}(3 + \sqrt[4]{y}) = 8. \end{cases} \end{array}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи метод заміни змінної в одному з рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt{x+y} - 2\sqrt[4]{x+y} = 3, \\ 2x+3y = 203; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 2\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[6]{x-y} = 3, \\ \sqrt[3]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} = -2; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{x+y+3} + x+y = 17. \end{cases} \end{array}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи метод заміни змінної:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+xy} = 3, \\ x+y+x^2+xy = 5; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y} = 1; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases} \end{array}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt[3]{x-y+27} = 3, \\ \sqrt{2x-y+2} = x; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ \sqrt{x-3y} + \sqrt{x+5y} = 4; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases} \end{array}$$

Рівень В

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x+y = 28; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt{x} = 12, \\ xy = 64; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases} \end{array}$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{xy} = 3; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1, \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{xy} = 19; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35. \end{cases} \end{array}$$

3. Знайдіть множину розв'язків системи рівнянь, використовуючи заміну змінних:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ x+y = 17; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x + \sqrt{y} = 56, \\ \sqrt{x} + y = 56; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{2y-5x} = x, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{2y-5x} = y. \end{cases} \end{array}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи заміну змінних:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt[3]{x+y+4} + \sqrt[3]{y+7} = 4, \\ x+2y = 5; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x+y = 7; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x+2y = 23. \end{cases} \end{array}$$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1, \\ 3x+2y=4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{4-x+y} + \sqrt{9-2x+y} = 7, \\ 2y-3x=12; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \sqrt{x^2+5} + \sqrt{y^2-5} = 5, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи метод множення або ділення:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{\frac{108x}{5y}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{20y}{3x}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\frac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$$

7. Розв'яжіть систему рівнянь із використанням заміни змінних:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y} = \sqrt{x+y-4}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 9x^2 + \sqrt{9x^2+2y+1} = 1-2y, \\ 6x+y=2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2+4x+y^2-3y=0. \end{cases}$$

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{3}{2-\sqrt{x-y}} + \frac{10}{2+\sqrt{x+y}} = 5, \\ \frac{4}{2-\sqrt{x-y}} - \frac{5}{2+\sqrt{x+y}} = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{xy}, \\ x+y=5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 14, \\ \sqrt{\frac{x+y}{8}} - \sqrt{\frac{x-y}{12}} = 3. \end{cases}$$

9. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 3, \\ \sqrt{(x-y)^2} = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right)^2} = 1,6, \\ xy=2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2} = \frac{5}{2}, \\ \sqrt{(x+y)^2} = 5. \end{cases}$$

10. Розв'яжіть систему рівнянь, попередньо використавши рівносильні перетворення з урахуванням ОДЗ:

$$\text{а) } \begin{cases} x-y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}, \\ x^2+y^2=34; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x-y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{12}{x+y}, \\ x^2+y^2=41; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}} + \sqrt{y+\frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2+1)y + (y^2+1)x = 4xy. \end{cases}$$

11. Розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь, що містять змінну у степені з дробовим показником:

$$\text{а) } \begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{2}} + (x-y)^{\frac{1}{3}} = 6, \\ \left((x+y)^3(x-y)^2\right)^{\frac{1}{6}} = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = 0,5(xy)^{\frac{1}{2}}, \\ x+y=5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x} + y^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{y} = 1\frac{1}{2}, \\ xy=64. \end{cases}$$

12. Розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь, що містять параметри:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x+a}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x+a}} = 2, \\ x+y=xy+a; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4a, \\ x-y=8a^2. \end{cases}$$

Рівень С

1. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1. \end{cases}$$
2. Використовуючи нерівність трикутника та формулу відстані між точками у декартовій системі координат, розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 5. \end{cases}$$
3. Використовуючи нерівність багатокутника для векторів на площині, розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y + z + t = 8, \\ \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2} = 6. \end{cases}$$
4. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} + \sqrt{x-3y} = 4, \\ 2x + 3y = 17 \end{cases}$$
 заміною змінних.
5. Розв'яжіть систему трьох ірраціональних рівнянь з трьома змінними:
$$\begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y} + \sqrt{z+4} = 6, \\ 2\sqrt{x-4} - \sqrt{y} - 4\sqrt{z+4} = -12, \\ x + y + z = 14. \end{cases}$$
6. Розв'яжіть систему рівнянь з параметрами a та b :
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{ax+by}{bx+ay}} + \sqrt{\frac{bx+ay}{ax+by}} = 2, \\ \sqrt{\frac{x+1}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} = 2,5. \end{cases}$$

VII. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учнім/ученицям оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
-
-
- 2)
-
-

?

.....

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Геометричні задачі, що призводять до систем ірраціональних рівнянь.
- 2.** Системи ірраціональних рівнянь на математичних олімпіадах школярів України.
- 3.** Використання нерівностей при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь.
- 4.** Узагальніть розв'язання завдань 2 і 3 рівня С. Складіть алгоритм розв'язання та продемонструйте його роботу на конкретних прикладах.
- 5.** Використання графіків функцій при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь.