

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 6. Урок–практикум. Розв’язування систем ірраціональних рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте основні ідеї щодо розв’язування систем ірраціональних рівнянь;
- 2) відпрацюєте вміння та навички розв’язання систем ірраціональних рівнянь;
- 3) застосуєте заміну змінних в одному рівнянні із системи ірраціональних рівнянь;
- 4) застосуєте подвійну заміну змінної для розв’язування певних типів систем ірраціональних рівнянь;
- 5) застосуєте набуті знання, вміння та навички для розв’язання самостійної роботи, а також геометричної задачі методами алгебри.

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

1. Розв’яжіть систему рівнянь методом підстановки:
$$\begin{cases} \sqrt{2y} + \sqrt{14x + y} = 6, \\ y = 2x. \end{cases}$$
2. Використайте додавання або віднімання рівнянь системи та знайдіть її розв’язки:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - y} = 3, \\ 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x - y} = 3. \end{cases}$$

3. Зробіть заміну змінної в одному з рівнянь системи та знайдіть її розв'язки:
- $$\begin{cases} \sqrt{x+y} - 2\sqrt[4]{x+y} = 3, \\ 2x + 3y = 203. \end{cases}$$
4. Розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь методом заміни змінної:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$$
5. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 3, \\ \sqrt{(x-y)^2} = 1. \end{cases}$$

Відповіді. 1. (1; 2); 2. (8; 7); 3. (40; 41); 4. (9; 1), (1; 9); 5. (2; 1), (1; 2), (-1; -2), (-2; -1).

Завдання для обговорення

6. Розв'яжіть систему, використовуючи заміну змінної:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$
- Вказівка.* Якщо позначити кожний доданок першого рівняння як нову змінну, то сума кубів цих змінних буде відрізнятися від лівої частини другого рівняння системи на 2.
- Відповідь. (2; 3), $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.
7. Урахуйте ОДЗ та розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь:
$$\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x} + y^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{y} = 1\frac{1}{2}, \\ xy = 64. \end{cases}$$
- Вказівка.* Необхідно врахувати область визначення степеня з дробовим від'ємним показником.
- Відповідь. (64; 1), (1; 64).
8. Використовуючи нерівність трикутника та формулу відстані між точками у декартовій системі координат, розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 5. \end{cases}$$
- Вказівка.* Ліва частина другого рівняння — це сума відстаней від точки $(x; y)$ до точок $A(3; -1)$, $B(7; 2)$, а права частина цього рівняння — відстань між точками A та B .
- Відповідь. (5; 0,5).

III. Робота в парах над розв'язуванням найпростіших систем ірраціональних рівнянь різними методами

<i>Деякі методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь</i>		
Метод	Приклад	Розв'язання
Додавання або віднімання рівнянь системи	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{4-y} = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{4-y} = 3. \end{cases}$	Додамо та віднімемо рівняння системи: $\begin{cases} 2\sqrt{x} = 5 + 3, \\ 2\sqrt{4-y} = 5 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16, \\ y = 3. \end{cases}$
Множення або ділення рівнянь системи	$\begin{cases} \sqrt{xy} = 6, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{3}. \end{cases}$	До ОДЗ входять пари чисел $(x; y)$ таких, що або обидва додатні, або обидва від'ємні. Перемножимо та поділимо рівняння системи: $\begin{cases} \sqrt{x^2} = 6 \cdot \frac{2}{3}, \\ \sqrt{y^2} = 6 : \frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4, \\ y = \pm 9. \end{cases}$ Із урахуванням ОДЗ, маємо дві відповіді: $(-4; -9)$ та $(4; 9)$.
Підстановка	$\begin{cases} x + y = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2 - x, \\ \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x + 2 - x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{2-x} = 4, \\ x \in [0; 2]; \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x \cdot (2 - x) = 1, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x^2 - 2x + 1 = 0, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$
Заміна змінних	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$	Заміна: $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$. Маємо: $\begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a(4 - a) = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a^2 - 4a + 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, b = 1, \\ a = 1, b = 3. \end{cases}$ Для початкових змінних: $\begin{cases} \sqrt{x} = 3, \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} = 1, \sqrt{y} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, y = 1, \\ x = 1, y = 9. \end{cases}$

Завдання для роботи в парах

9. Розв'яжіть систему методом додавання або віднімання:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1, \\ 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 7. \end{cases}$$
10. Розв'яжіть систему методом множення або ділення:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot y = 2, \\ \sqrt[3]{y} \cdot x = 8. \end{cases}$$
11. Розв'яжіть систему методом підстановки:
$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

- 12.** Розв'яжіть систему, використовуючи заміну змінних у першому рівнянні:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

- 13.** Розв'яжіть систему, використовуючи метод заміни змінних:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 7, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3. \end{cases}$$

IV. Робота в малих групах над розв'язуванням систем ірраціональних рівнянь

Задачі для роботи в малих групах

- 14.** Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ x + y = 35 \end{cases}$$
 двома способами: методом підстановки

та методом заміни змінної з одночасним розкладанням лівої частини другого рівняння на множники. Порівняйте ефективність даних методів.

- 15.** Розв'яжіть систему рівнянь за допомогою заміни змінної:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - 3\sqrt[3]{xy} = -1. \end{cases}$$

Чи варто виділяти у лівій частині другого рівняння квадрат суми? Чому? Наведіть аргументи на користь такого підходу, підтвердіть або спростуйте його ефективність.

- 16.** Розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{2x + y + 2} = 3, \\ \sqrt{x + 2y + 5} = y - x. \end{cases}$$

Чи варто використовувати при розв'язанні рівносильні системи, або краще скористатися системами-наслідками? Чому ви так вважаєте? На яких етапах розв'язання ви скористалися областю визначення та множиною значень функції арифметичного квадратного кореня?

- 17.** Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

Чи варто при розв'язанні скористатися методом підстановки? Який спосіб розв'язання ви запропонуєте? Скільки розв'язків має дана система?

- 18.** Розгляньте представлений спосіб розв'язання системи ірраціональних рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -1, \\ y + x = -7. \end{cases}$$
 Які недоліки ви у ньому бачите? Виправте їх та знайдіть множину

розв'язків даної системи.

Розв'язання. В обох рівняннях системи виконаємо заміну змінних: $x^{\frac{1}{3}} = a$, $y^{\frac{1}{3}} = b$.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} a + b = -1, \\ a^3 + b^3 = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1, \\ (a + b)(a^2 - ab + b^2) = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1, \\ a^2 - ab + b^2 = 7. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему методом підстановки:

Оскільки $a = x^{\frac{1}{3}}$, $b = y^{\frac{1}{3}}$, а степінь із дробовим показником не може набувати від'ємних значень, то в обох отриманих випадках немає розв'язків.

V. Самостійна робота

- | | | | | |
|---|---|---|----|----|
| А | Б | В | Г | Д |
| 4 | 5 | 7 | 10 | 12 |

[illegible]

- | А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|----------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | інша відповідь |

[illegible]

- | А | Б | В | Г | Д |
|-----------|----------|-----------|------------|---------------------------------|
| $(-5; 0)$ | $(0; 4)$ | $(4; 10)$ | $(10; 17)$ | немає розв'язків у цілих числах |

[illegible]







