

10

Тема 3.

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 6. Урок–практикум. Розв’язування систем ірраціональних рівнянь

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в парах над розв’язуванням найпростіших систем ірраціональних рівнянь різними методами.
3. Робота в малих групах над розв’язуванням систем ірраціональних рівнянь.
4. Самостійна робота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку – формування стійких умінь та навичок щодо розв’язування типових систем ірраціональних рівнянь.
- 2) Додаткова мета уроку — формування умінь розв’язувати більш складні системи ірраціональних рівнянь.
- 3) Важливо постійно акцентувати увагу при розв’язанні рівнянь на використання та зміст понять ОДЗ, рівносильні перетворення, рівносильні системи рівнянь.

- 4) Матеріал уроку подано з надлишком, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 5) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.
- 6) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 7) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. До двох кіл, які дотикаються зовнішнім чином, провели спільну зовнішню дотичну. В утворений криволінійний трикутник вписали коло з радіусом $r = \frac{9}{16}$ см. Знайдіть радіуси двох даних кіл, якщо відстань між їхніми центрами дорівнює 10 см.

I. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

1. Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:
$$\begin{cases} \sqrt{2y} + \sqrt{14x + y} = 6, \\ y = 2x. \end{cases}$$
2. Використайте додавання або віднімання рівнянь системи та знайдіть її розв'язки:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - y} = 3, \\ 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x - y} = 3. \end{cases}$$
3. Зробіть заміну змінної в одному з рівнянь системи та знайдіть її розв'язки:
$$\begin{cases} \sqrt{x + y} - 2\sqrt[4]{x + y} = 3, \\ 2x + 3y = 203. \end{cases}$$
4. Розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь методом заміни змінної:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$$
5. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{(x + y)^2} = 3, \\ \sqrt{(x - y)^2} = 1. \end{cases}$$

Відповіді. 1. (1; 2); 2. (8; 7); 3. (40; 41); 4. (9; 1), (1; 9); 5. (2; 1), (1; 2), (-1; -2), (-2; -1).

Завдання для обговорення

6. Розв'яжіть систему, використовуючи заміну змінної:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x + 2y} + \sqrt[3]{x - y + 2} = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Вказівка. Якщо позначити кожний доданок першого рівняння як нову змінну, то сума кубів цих змінних буде відрізнятися від лівої частини другого рівняння системи на 2.

Відповідь. (2; 3), $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

7. Урахуйте ОДЗ та розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь:
$$\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x} + y^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{y} = 1\frac{1}{2}, \\ xy = 64. \end{cases}$$

Вказівка. Необхідно врахувати область визначення степеня з дробовим від'ємним показником.

Відповідь. (64; 1), (1; 64).

8. Використовуючи нерівність трикутника та формулу відстані між точками у декартовій системі координат, розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 5. \end{cases}$$

Вказівка. Ліва частина другого рівняння — це сума відстаней від точки $(x; y)$ до точок $A(3; -1)$, $B(7; 2)$, а права частина цього рівняння — відстань між точками A та B .

Відповідь. (5; 0,5).

II. Робота в парах над розв'язуванням найпростіших систем ірраціональних рівнянь різними методами

Деякі методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь

Метод	Приклад	Розв'язання
Додавання або віднімання рівнянь системи	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{4-y} = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{4-y} = 3. \end{cases}$	Додамо та віднімемо рівняння системи: $\begin{cases} 2\sqrt{x} = 5 + 3, \\ 2\sqrt{4-y} = 5 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16, \\ y = 3. \end{cases}$
Множення або ділення рівнянь системи	$\begin{cases} \sqrt{xy} = 6, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{3}. \end{cases}$	До ОДЗ входять пари чисел $(x; y)$ таких, що або обидва додатні, або обидва від'ємні. Перемножимо та поділимо рівняння системи: $\begin{cases} \sqrt{x^2} = 6 \cdot \frac{2}{3}, \\ \sqrt{y^2} = 6 : \frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4, \\ y = \pm 9. \end{cases}$ Із урахуванням ОДЗ, маємо дві відповіді: $(-4; -9)$ та $(4; 9)$.
Підстановка	$\begin{cases} x + y = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2 - x, \\ \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x + 2 - x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{2-x} = 4, \\ x \in [0; 2]; \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x \cdot (2 - x) = 1, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x^2 - 2x + 1 = 0, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$

Деякі методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь

Метод	Приклад	Розв'язання
Заміна змінних	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$	Заміна: $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$. Маємо: $\begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a(4 - a) = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a^2 - 4a + 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, b = 1, \\ a = 1, b = 3. \end{cases}$ Для початкових змінних: $\begin{cases} \sqrt{x} = 3, \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} = 1, \sqrt{y} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, y = 1, \\ x = 1, y = 9. \end{cases}$

Завдання для роботи в парах

9. Розв'яжіть систему методом додавання або віднімання:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1, \\ 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 7. \end{cases}$$
10. Розв'яжіть систему методом множення або ділення:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot y = 2, \\ \sqrt[3]{y} \cdot x = 8. \end{cases}$$
11. Розв'яжіть систему методом підстановки:
$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$$
12. Розв'яжіть систему, використовуючи заміну змінних у першому рівнянні:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$
13. Розв'яжіть систему, використовуючи метод заміни змінних:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 7, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3. \end{cases}$$

III. Робота в малих групах над розв'язуванням систем ірраціональних рівнянь

Задачі для роботи в малих групах

14. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ x + y = 35 \end{cases}$$
 двома способами: методом підстановки та методом заміни змінної з одночасним розкладанням лівої частини другого рівняння на множники. Порівняйте ефективність даних методів.
15. Розв'яжіть систему рівнянь за допомогою заміни змінної:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - 3\sqrt[3]{xy} = -1. \end{cases}$$

Чи варто виділяти у лівій частині другого рівняння квадрат суми? Чому? Наведіть аргументи на користь такого підходу, підтвердіть або спростуйте його ефективність.

16. Розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{2x + y + 2} = 3, \\ \sqrt{x + 2y + 5} = y - x. \end{cases}$$

Чи варто використовувати при розв'язанні рівносильні системи, або краще скористатися системами-наслідками? Чому ви так вважаєте? На яких етапах розв'язання ви скористалися областю визначення та множиною значень функції арифметичного квадратного кореня?

17. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

Чи варто при розв'язанні скористатися методом підстановки? Який спосіб розв'язання ви запропонуєте? Скільки розв'язків має дана система?

18. Розгляньте представлений спосіб розв'язання системи ірраціональних рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -1, \\ y + x = -7. \end{cases}$$
 Які недоліки ви у ньому бачите? Виправте їх та знайдіть множину розв'язків даної системи.

Розв'язання. В обох рівняннях системи виконаємо заміну змінних: $x^{\frac{1}{3}} = a$, $y^{\frac{1}{3}} = b$.

Маємо:
$$\begin{cases} a + b = -1, \\ a^3 + b^3 = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1, \\ (a + b)(a^2 - ab + b^2) = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1, \\ a^2 - ab + b^2 = 7. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему методом підстановки:

$$\begin{cases} a + b = -1, \\ a^2 - ab + b^2 = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -(a + 1), \\ a^2 + a(a + 1) + (a + 1)^2 = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -(a + 1), \\ a^2 + a - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = -2, \\ a = -2, b = 1. \end{cases}$$

Оскільки $a = x^{\frac{1}{3}}$, $b = y^{\frac{1}{3}}$, а степінь із дробовим показником не може набувати від'ємних значень, то в обох отриманих випадках немає розв'язків.

Відповідь. Система не має розв'язків.

IV. Самостійна робота

1. Система рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 1, \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7 \end{cases}$$
 має розв'язок $(x_0; y_0)$. Знайдіть суму $x_0 + y_0$.

А	Б	В	Г	Д
4	5	7	10	12

2. Визначте, скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ x + y + 4\sqrt{xy} = 37. \end{cases}$$

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	інша відповідь

3. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{3x^2 - 2y + 3} = \frac{2}{3}y + 5, \\ 3y - 2x = 5 \end{cases}$$
 у цілих числах. Знайдіть,

якому проміжку належать обидва компоненти розв'язку.

А	Б	В	Г	Д
(-5; 0)	(0; 4)	(4; 10)	(10; 17)	немає розв'язків у цілих числах

4. Система рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4, \\ 3y - 2x = 4 \end{cases}$$
 має розв'язок $(x_0; y_0)$. Знайдіть найбільше

можливе значення x_0 .

А	Б	В	Г	Д
-10	-2	10	20	інша відповідь

5. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{2x - y + 11} - \sqrt{3x + y - 9} = 3, \\ \sqrt[4]{2x - y + 11} + \sqrt[4]{3x + y - 9} = 3 \end{cases}$$
 та знайдіть, у скільки

разів відрізняються компоненти розв'язку.

А	Б	В	Г	Д
у 3 рази	у 2 рази	у 2,5 разу	існує декілька значень	інша відповідь

V. Розв'язання геометричної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

Задача. До двох кіл, які дотикаються зовнішнім чином, провели спільну зовнішню дотичну. В утворений криволінійний трикутник вписали коло з радіусом $r = \frac{9}{16}$ см. Знайдіть радіуси двох даних кіл, якщо відстань між їхніми центрами дорівнює 10 см.

Розв'язання. Зробимо рисунок відповідно до умови та розв'яжемо задачу, виходячи з нього.

Нехай дані кола мають центри у точках A та C і радіуси R_1, R_2 відповідно.

Тоді $AC = R_1 + R_2$ (см).

З прямокутного трикутника AJC , за теоремою Піфагора, маємо:

$$AJ = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2} = 2\sqrt{R_1 R_2}.$$

Використовуючи теорему Піфагора в трикутниках AHF та CIF , маємо:

$$HF = \sqrt{(R_1 + r)^2 - (R_1 - r)^2} = 2\sqrt{R_1 r},$$

$$IF = \sqrt{(R_2 + r)^2 - (R_2 - r)^2} = 2\sqrt{R_2 r}.$$

Оскільки $BE = HI = HF + FI$, то $2\sqrt{R_1 R_2} = 2\sqrt{R_1 r} + 2\sqrt{R_2 r}$.

З урахуванням умови $r = \frac{9}{16}$, отримуємо систему ірраціональних рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt{R_1 R_2} = \frac{3}{4}(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}), \\ R_1 + R_2 = 10. \end{cases}$$

Піднесемо перше рівняння системи до квадрата і врахуємо, що сума радіусів даних кіл дорівнює 10:

$$R_1 R_2 = \frac{9}{16}(R_1 + 2\sqrt{R_1 R_2} + R_2), \quad 16R_1 R_2 = 9(2\sqrt{R_1 R_2} + 10).$$

Зробимо заміну змінної у першому рівнянні системи: $a = \sqrt{R_1 R_2}$.

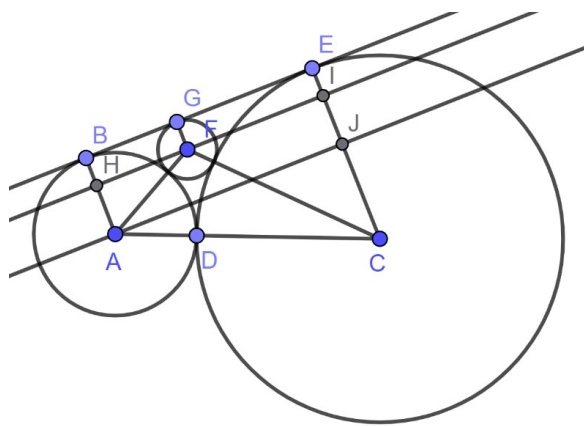
Тоді маємо квадратне рівняння $16a^2 - 18a - 90 = 0$ з єдиним додатним коренем $a = 3$.

Для початкових змінних:
$$\begin{cases} \sqrt{R_1 R_2} = 3, \\ R_1 + R_2 = 10. \end{cases}$$

Звідси легко знайти, що радіуси даних в умові кіл дорівнюють 1 см та 9 см.

Зауваження. Оскільки значення уведених змінних є додатними числами, то усі виконані перетворення системи є рівносильними.

Відповідь. 1 см; 9 см.



VI. Рефлексія (1–2 хв)

- | | | | | |
|----|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я знаю основні методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію використовувати метод додавання або віднімання для розв'язування систем ірраціональних рівнянь. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію використовувати заміну змінних для розв'язування систем ірраціональних рівнянь. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію застосовувати метод підстановки для розв'язування систем ірраціональних рівнянь. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію розв'язувати системи ірраціональних рівнянь із використанням декількох методів одночасно. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію ідею застосування ірраціональних рівнянь для розв'язування прикладних задач. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Розробіть алгоритм для розв'язування систем ірраціональних рівнянь виду
$$\begin{cases} ax + by = c, \\ d\sqrt{x} + e\sqrt{y} = f, \end{cases}$$
 враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d, e, f .
Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
- 2.** Розробіть алгоритм для розв'язування систем ірраціональних рівнянь виду
$$\begin{cases} a^4\sqrt{x} + b^4\sqrt{y} = c, \\ d\sqrt{x} + e\sqrt{y} = f, \end{cases}$$
 враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d, e, f .
Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
- 3.** Розробіть алгоритм для розв'язування систем ірраціональних рівнянь виду
$$\begin{cases} a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = c, \\ d\sqrt{x} + e\sqrt{y} = f, \end{cases}$$
 враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d, e, f .
Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
- 4.** Розробіть алгоритм для розв'язування систем ірраціональних рівнянь виду
$$\begin{cases} \sqrt[3]{ax + by} + \sqrt[3]{cx + dy} = e, \\ (a + c)x + (b + d)y = f, \end{cases}$$
 враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d, e, f . Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.