

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 7. Урок–практикум. Розв’язування ірраціональних рівнянь та їхніх систем

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

- 1) пригадаєте основні ідеї щодо розв’язування ірраціональних рівнянь та їхніх систем;
- 2) відпрацюєте вміння та навички розв’язання стандартних ірраціональних рівнянь та систем;
- 3) познайомитеся з додатковими методами розв’язування ірраціональних рівнянь;
- 4) обговорите нестандартні, зокрема олімпіадні, завдання з ірраціональними рівняннями та системами;
- 5) застосуєте набуті знання, вміння та навички для розв’язання геометричної задачі алгебричними методами.

II. Завдання для проєктів

1. Виділення повного квадрата під знаком кореня.

Розв’яжіть рівняння $\sqrt{x+6} + 2\sqrt{x+5} + \sqrt{x+6} - 2\sqrt{x+5} = 6$.

2. Множення на спряжений вираз.

Розв’яжіть рівняння $(\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{x+10} - 4) = x$.

3. Стандартні ірраціональні рівняння (аналіз домашнього завдання).

Розв’яжіть рівняння: $\frac{7x-2}{\sqrt{3x-8}} = 3\sqrt{2x+3}$; $\frac{x^{\frac{4}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1} - \frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{\sqrt[3]{x+1}} = 4$.

4. Стандартні системи ірраціональних рівнянь (аналіз домашнього завдання).

Розв'яжіть системи ірраціональних рівнянь:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+xy} = 3, \\ x+y+x^2+xy = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x+\sqrt{y} = 56, \\ \sqrt{x}+y = 56. \end{cases}$$

5. Нестандартні ірраціональні рівняння (аналіз домашнього завдання).

Розв'яжіть рівняння: $2 - \sqrt{x^2 - 1} = x + \frac{1}{x}$; $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} - 12$.

6. Нестандартні системи ірраціональних рівнянь (аналіз домашнього завдання).

Розв'яжіть системи ірраціональних рівнянь:

$$\begin{cases} x-y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{12}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z+t = 8, \\ \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2} = 6. \end{cases}$$

7. Ірраціональні рівняння та їхні системи на олімпіадах.

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$x_1 + \sqrt{x_2} = x_2 + \sqrt{x_3} = x_3 + \sqrt{x_4} = \dots x_{2024} + \sqrt{x_{2025}} = x_{2025} + \sqrt{x_1} = 2.$$

III. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь різними методами

<i>Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов</i>		
Вид рівняння	Рівносильна система	Приклад
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 2 - x, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3} = x - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a,$ $a > 0$	$\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2 - x)} = 1, \\ x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$

Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов		
Вид рівняння	Рівносильна система	Приклад
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = a,$ $a > 0$	$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = a + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = g(x) + 2a\sqrt{g(x)} + a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x - 2\sqrt{x(2-x)} = 1, \\ x \geq 2-x, \\ 2-x \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	$\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2-x)} = x + 1, \\ x \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x+1 \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = h(x) + 2\sqrt{h(x) \cdot g(x)} + g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x - 2\sqrt{x(2-x)} = x - 3, \\ x \geq 2-x, \\ 2-x \geq 0, \\ x-3 \geq 0. \end{cases}$

Задачі для роботи в парах

- Розв'яжіть ірраціональне рівняння $\sqrt{x^2 - 36} = \sqrt{-1 - 2x}$.
- Знайдіть множину розв'язків рівняння $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 3x + 4$.
- Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+8} + 1 = \sqrt{7x+9}$.
- Розв'яжіть рівняння методом виділення повного квадрата під знаком радикала:
 $\sqrt{x-5} + 2\sqrt{x-6} + \sqrt{x-5} - 2\sqrt{x-6} = 2$.
- Розв'яжіть рівняння методом домноження на спряжений вираз й отримання рівняння-наслідку: $(\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{x+1} + 2x - 5) = x$.

IV. Мозковий штурм при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь

<i>Деякі методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь</i>		
Метод	Приклад	Розв'язання
Додавання або віднімання рівнянь системи	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{4-y} = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{4-y} = 3. \end{cases}$	Додамо та віднімемо рівняння системи: $\begin{cases} 2\sqrt{x} = 5 + 3, \\ 2\sqrt{4-y} = 5 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16, \\ y = 3. \end{cases}$
Множення або ділення рівнянь системи	$\begin{cases} \sqrt{xy} = 6, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{3}. \end{cases}$	До ОДЗ входять пари чисел $(x; y)$ таких, що або обидва додатні, або обидва від'ємні. Перемножимо та поділимо рівняння системи: $\begin{cases} \sqrt{x^2} = 6 \cdot \frac{2}{3}, \\ \sqrt{y^2} = 6 : \frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4, \\ y = \pm 9. \end{cases}$ Із урахуванням ОДЗ маємо дві відповіді: $(-4; -9)$ та $(4; 9)$.
Підстановка	$\begin{cases} x + y = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2 - x, \\ \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x + 2 - x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{2-x} = 4, \\ x \in [0; 2]; \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x \cdot (2 - x) = 1, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x^2 - 2x + 1 = 0, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$
Заміна змінних	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$	Заміна: $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$. Маємо: $\begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a(4 - a) = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a^2 - 4a + 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, b = 1, \\ a = 1, b = 3. \end{cases}$ Для початкових змінних: $\begin{cases} \sqrt{x} = 3, \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} = 1, \sqrt{y} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, y = 1, \\ x = 1, y = 9. \end{cases}$

Задачі для мозкового штурму

- Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136. \end{cases}$$
- Знайдіть множину розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$$
- Визначте, скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{x^2} + y = 5, \\ y^2 - x = 7. \end{cases}$$

4. Нехай система рівнянь $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3, \\ x^2 + y^2 - xy = 13 \end{cases}$ має розв'язок виду $(x_0; y_0)$. Знайдіть найбільше можливе значення $|y_0|$.
- 5*. Система рівнянь $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, \\ \sqrt{x+y} + x - y = 2 \end{cases}$ має розв'язок $(2; 2)$. Чи є у неї інші розв'язки? Як у цьому пересвідчитися?

V. Розв'язання геометричної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 3 см та 4 см, а радіус уписаного кола $r = 1$ см.

Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

- (+) що було зрозумілим:
-
-
- (-) що залишилося незрозумілим:
-
-
- (?) що здивувало або зацікавило:
-
-

Можливі теми проєктів

1. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt{ax+b+c^2+2c \cdot \sqrt{ax+b}} \pm \sqrt{ax+b+d^2+2d \cdot \sqrt{ax+b}} = e$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d, e . Продемонструйте роботу алгоритму на наступних прикладах:
- а) $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$;
- б) $\sqrt{x-4+4\sqrt{x-8}} + \sqrt{x-4-4\sqrt{x-8}} = 2$;
- в) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 3$;
- г) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$;
- г) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

2. Опишіть загальну ідею застосування множення обох частин рівняння на множник, спряжений з виразом виду $\sqrt{f(x)} \pm a$ або виду $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$, задля отримання рівняння-наслідку. Продемонструйте реалізацію ідеї на наступних прикладах:

а) $(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+x^2+x-7)=x;$

б) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x;$

в) $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2;$

г) $\frac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\frac{21}{x};$

г) $\frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x}}=\frac{x}{6}.$







