

# Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

## Урок 7. Урок–практикум. Розв’язування ірраціональних рівнянь та їхніх систем

**Тип уроку:** комбінований урок.

### План уроку

1. Робота учнів/учениць над індивідуальними (груповими) проєктами.
2. Розв’язування ірраціональних рівнянь різними методами.
3. Розв’язування систем ірраціональних рівнянь різними методами.

### Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П];

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює застосування їх, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П].

### Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку — закріплення умінь та навичок щодо розв’язування типових ірраціональних рівнянь та їхніх систем.
- 2) Додаткова мета уроку — формування умінь розв’язувати складні ірраціональні рівняння та їхні системи.
- 3) Важливо постійно акцентувати увагу при розв’язанні рівнянь та їхніх систем на використанні та зміст понять ОДЗ, рівносильні перетворення, рівносильні системи рівнянь.

4) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

5) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.

## Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 3 см та 4 см, а радіус уписаного кола  $r = 1$  см.

На початку уроку запропонуйте учням/ученицям обрати форму роботи над невеликими проєктами: індивідуальну або групову. Розподіліть теми проєктів у відповідності до вподобань і можливостей учнів/учениць. Бажано, щоб кожну тему обрав/обрала принаймні один/одна учень/учениця або одна група учнів/учениць. Під час роботи учням/ученицям можна залучати сторонні ресурси, а саме: книги, інтернет, штучний інтелект, комп'ютерні програми тощо. Важливо прийти до правильних висновків. Джерела додаткової інформації учні/учениці обирають на свій розсуд, але ви можете проконсультувати учнівство щодо доцільності обрання тих чи інших ресурсів. Після роботи над проєктами варто організувати коротке підведення підсумків — ознайомлення з головними ідеями всіх проєктів. Учителю на обговоренні виступає у ролі модератора.

## I. Завдання для проєктів

### 1. Виділення повного квадрата під знаком кореня.

Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x+6} + 2\sqrt{x+5} + \sqrt{x+6} - 2\sqrt{x+5} = 6$ .

### 2. Множення на спряжений вираз.

Розв'яжіть рівняння  $(\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{x+10} - 4) = x$ .

### 3. Стандартні ірраціональні рівняння (аналіз домашнього завдання).

Розв'яжіть рівняння:  $\frac{7x-2}{\sqrt{3x-8}} = 3\sqrt{2x+3}$ ;  $\frac{x^{\frac{4}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1} - \frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{\sqrt[3]{x+1}} = 4$ .

### 4. Стандартні системи ірраціональних рівнянь (аналіз домашнього завдання).

Розв'яжіть системи ірраціональних рівнянь: 
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+xy} = 3, \\ x+y+x^2+xy = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x+\sqrt{y} = 56, \\ \sqrt{x}+y = 56. \end{cases}$$

### 5. Нестандартні ірраціональні рівняння (аналіз домашнього завдання).

Розв'яжіть рівняння:  $2 - \sqrt{x^2-1} = x + \frac{1}{x}$ ;  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2-16} - 12$ .

**6. Нестандартні системи ірраціональних рівнянь (аналіз домашнього завдання).**

Розв'яжіть системи ірраціональних рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{12}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + t = 8, \\ \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2} = 6. \end{cases}$$

**7. Ірраціональні рівняння та їхні системи на олімпіадах.**

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$x_1 + \sqrt{x_2} = x_2 + \sqrt{x_3} = x_3 + \sqrt{x_4} = \dots x_{2024} + \sqrt{x_{2025}} = x_{2025} + \sqrt{x_1} = 2.$$

**Відповіді та вказівки.**

- 1.** Виділяємо квадрат суми або різниці під зовнішніми радикалами та розв'язуємо методом інтервалів отримане рівняння:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}} + \sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}} = 6 &\Leftrightarrow \sqrt{(1+\sqrt{x+5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{x+5})^2} = 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |1+\sqrt{x+5}| + |1-\sqrt{x+5}| = 6 \Leftrightarrow |1+a| + |1-a| = 6 \text{ при } a = \sqrt{x+5}. \end{aligned}$$

Варто врахувати, що  $a \geq 0$ .

Відповідь.  $x = 4$ .

- 2.** Домножуємо обидві частини рівняння на вираз, спряжений із виразом у перших дужках, і отримаємо рівняння-наслідок:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+10}-4) = x &\Rightarrow (\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+10}-4) = (\sqrt{x+1}-1)x, \text{ тобто} \\ (x+1-1)(\sqrt{x+10}-4) &= (\sqrt{x+1}-1)x, \text{ або ж } \sqrt{x+10}-4 = \sqrt{x+1}-1. \text{ Розв'язуючи це} \\ \text{рівняння, отримаємо } x &= -1. \text{ Залишається зробити перевірку.} \end{aligned}$$

Відповідь.  $x = -1$ .

- 3.** Розв'яжіть рівняння  $\frac{7x-2}{\sqrt{3x-8}} = 3\sqrt{2x+3}$ .

Відповідь.  $x = 11$ .

Рівняння  $\frac{x^{\frac{4}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1} - \frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{\sqrt[3]{x}+1} = 4$  варто рівносильними перетвореннями звести до виду:

$$x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0 \text{ і врахувати ОДЗ: } x \in [0;1) \cup (1;+\infty).$$

Відповідь.  $x = 8$ .

- 4.** Для розв'язання системи  $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+xy} = 3, \\ x+y+x^2+xy = 5 \end{cases}$  варто зробити заміну змінних:

$$a = \sqrt{x+y}, b = \sqrt{x^2+xy}. \text{ Тоді система зводиться до виду: } \begin{cases} a+b=3, \\ a^2+b^2=5. \end{cases}$$

Відповідь.  $\left(\frac{1}{4}; 3\frac{3}{4}\right), (4; -3)$ .

Для розв'язання системи  $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 56, \\ \sqrt{x} + y = 56 \end{cases}$  варто скористатися методом віднімання

і отримати:  $x + \sqrt{y} - \sqrt{x} - y = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{x})(1 - (\sqrt{y} + \sqrt{x})) = 0$ . Далі отримаємо два випадки:  $\sqrt{y} - \sqrt{x} = 0$  або  $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1$ .

*Відповідь.* (49; 49).

- 5.** Ліва частина рівняння  $2 - \sqrt{x^2 - 1} = x + \frac{1}{x}$  набуває значень, не більших за 2, а права частина — не менших від 2. Тож, обидві частини мають дорівнювати 2. Це відбувається лише при  $x = 1$ . Залишається зробити перевірку.

*Відповідь.*  $x = 1$ .

Для розв'язання рівняння  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} - 12$  варто зробити заміну  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = y$ , і тоді  $y^2 = 2x + 2\sqrt{(x+4)(x-4)}$ . Таким чином, початкове рівняння зведеться до виду:  $y = y^2 - 12$ .

*Відповідь.*  $x = 5$ .

- 6.** Із ОДЗ системи рівнянь  $\begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{12}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$ , зрозуміло, що вирази  $x - y$  та  $x + y$

або обидва додатні, або обидва від'ємні, або перший з них дорівнює нулю, а другий — ні. У перших двох варіантах варто домножити перше рівняння системи на  $x + y$  і зробити в отриманому рівнянні заміну  $a = \sqrt{(x-y) \cdot (x+y)}$ . У третьому варіанті перше рівняння системи, вочевидь, не має розв'язків.

*Відповідь.*  $(5; 4), (5; -4), (-\sqrt{28}, 5; \sqrt{12}, 5), (-\sqrt{28}, 5; -\sqrt{12}, 5)$ .

Для розв'язання системи  $\begin{cases} x + y + z + t = 8, \\ \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2} = 6 \end{cases}$  варто розглянути

вектори на площині:  $\vec{a} = (x; \sqrt{1-x^2}), \vec{b} = (y; \sqrt{4-y^2}), \vec{c} = (z; \sqrt{9-z^2}), \vec{d} = (t; \sqrt{16-t^2})$ .

Тоді маємо:  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| = 10$ . Отже, вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  є співнаправленими, а їхні абсциси та ординати пропорційні числам 8 та 6 відповідно.

*Відповідь.*  $\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}; \frac{12}{5}; \frac{16}{5}\right)$ .

- 7.** Припустимо, що у системі рівнянь

$x_1 + \sqrt{x_2} = x_2 + \sqrt{x_3} = x_3 + \sqrt{x_4} = \dots x_{2024} + \sqrt{x_{2025}} = x_{2025} + \sqrt{x_1} = 2$  компонента  $x_1$  більша за 1. Тоді, вочевидь,  $x_2 < 1, x_3 > 1, \dots, x_{2024} < 1, x_{2025} > 1$ . Але тоді  $x_{2025} + \sqrt{x_1} > 2$ , отримуємо суперечність. Аналогічна ситуація і при  $x_1 \in [0; 1)$ . Залишається розглянути очевидний випадок  $x_1 = 1$ .

*Відповідь.*  $(1; 1; 1; \dots 1)$ .

## II. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних рівнянь різними методами

| <i>Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов</i> |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Вид рівняння                                              | Рівносильна система                                                                                                                                                                                                                                                                  | Приклад                                                                                                                                                                                           |
| $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$                               | $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$                                                                                                                                                                 | $\sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 2 - x, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$                                                                  |
| $\sqrt{f(x)} = g(x)$                                      | $\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                           | $\sqrt{x^2 - 3} = x - 1 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$                                                                     |
| $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a,$<br>$a > 0$               | $\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$                                                                                                                                                                             | $\sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = 1 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2 - x)} = 1, \\ x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$                                      |
| $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = a,$<br>$a > 0$               | $\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2, \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$<br>або $\sqrt{f(x)} = a + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + 2a\sqrt{g(x)} + a^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ | $\sqrt{x} - \sqrt{2 - x} = 1 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x - 2\sqrt{x(2 - x)} = 1, \\ x \geq 2 - x, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$                                  |
| $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$                 | $\begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$                                                                                                                                                            | $\sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - x + 2\sqrt{x(2 - x)} = \\ = x + 1, \\ x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0, \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$ |

| <i>Ірраціональні рівняння та рівносильні системи умов</i> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Вид рівняння                                              | Рівносильна система                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Приклад                                                                                                                                                                                                 |
| $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$                 | $\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x), \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = h(x) + 2\sqrt{h(x) \cdot g(x)} + g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$ | $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x+2-x-2\sqrt{x(2-x)} = \\ = x-3, \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2-x, \\ 2-x \geq 0, \\ x-3 \geq 0. \end{cases}$ |

### Задачі для роботи в парах

- Розв'яжіть ірраціональне рівняння  $\sqrt{x^2 - 36} = \sqrt{-1 - 2x}$ .
- Знайдіть множину розв'язків рівняння  $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 3x + 4$ .
- Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x+8} + 1 = \sqrt{7x+9}$ .
- Розв'яжіть рівняння методом виділення повного квадрата під знаком радикала:  
 $\sqrt{x-5} + 2\sqrt{x-6} + \sqrt{x-5} - 2\sqrt{x-6} = 2$ .
- Розв'яжіть рівняння методом домноження на спряжений вираз й отримання рівняння-наслідку:  $(\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{x+1} + 2x - 5) = x$ .

## III. Мозковий штурм при розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь

| <i>Деякі методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь</i> |                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Метод                                                           | Приклад                                                                              | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Додавання або віднімання рівнянь системи                        | $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{4-y} = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{4-y} = 3. \end{cases}$ | Додамо та віднімемо рівняння системи: $\begin{cases} 2\sqrt{x} = 5 + 3, \\ 2\sqrt{4-y} = 5 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16, \\ y = 3. \end{cases}$                                                                                                                                                                                           |
| Множення або ділення рівнянь системи                            | $\begin{cases} \sqrt{xy} = 6, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{3}. \end{cases}$      | До ОДЗ входять пари чисел $(x; y)$ таких, що або обидва додатні, або обидва від'ємні. Перемножимо та поділимо рівняння системи: $\begin{cases} \sqrt{x^2} = 6 \cdot \frac{2}{3}, \\ \sqrt{y^2} = 6 : \frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4, \\ y = \pm 9. \end{cases}$ Із урахуванням ОДЗ маємо дві відповіді: $(-4; -9)$ та $(4; 9)$ . |

## Деякі методи розв'язування систем ірраціональних рівнянь

| Метод          | Приклад                                                                | Розв'язання                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Підстановка    | $\begin{cases} x + y = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$     | $\begin{cases} y = 2 - x, \\ \sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x + 2 - x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{2 - x} = 4, \\ x \in [0; 2]; \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x \cdot (2 - x) = 1, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x^2 - 2x + 1 = 0, \\ x \in [0; 2]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$                                                                                                        |
| Заміна змінних | $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$ | <p>Заміна: <math>\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b</math>. Маємо:</p> $\begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a(4 - a) = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a^2 - 4a + 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, b = 1, \\ a = 1, b = 3. \end{cases}$ <p>Для початкових змінних:</p> $\begin{cases} \sqrt{x} = 3, \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} = 1, \sqrt{y} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, y = 1, \\ x = 1, y = 9. \end{cases}$ |

- 1) Даємо учням/ученицям одразу декілька завдань для самостійного генерування ідей.
- 2) Обговорюємо їхні ідеї разом за допомогою методу «мозкового штурму», з'ясовуємо попередньо придатність цих ідей та їхню ефективність для розв'язання даної проблеми.
- 3) Перевіряємо отримані висновки на дошці (інтерактивній дошці, екрані і т.ін.) — етап реалізації ідей.
- 4) Колективно вносимо виправлення та додаткові ідеї для повного розв'язання та обґрунтування отриманих результатів.
- 5) Підводимо підсумки.

### Задачі для мозкового штурму

1. Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136. \end{cases}$$
2. Знайдіть множину розв'язків системи рівнянь 
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$$
3. Визначте, скільки розв'язків має система рівнянь 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2} + y = 5, \\ y^2 - x = 7. \end{cases}$$
4. Нехай система рівнянь 
$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3, \\ x^2 + y^2 - xy = 13 \end{cases}$$
 має розв'язок виду  $(x_0; y_0)$ . Знайдіть найбільше можливе значення  $|y_0|$ .

- 5\*.** Система рівнянь  $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, \\ \sqrt{x+y} + x - y = 2 \end{cases}$  має розв'язок (2; 2). Чи є у неї інші розв'язки? Як у цьому пересвідчитися?

## IV. Розв'язання геометричної задачі. Групова робота

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 3 см та 4 см, а радіус уписаного кола  $r = 1$  см.

*Розв'язання.* Нехай невідома сторона трикутника дорівнює  $x$  (см). Тоді півпериметр трикутника дорівнює  $\frac{7+x}{2}$ . Оскільки площа трикутника дорівнює добутку

півпериметра на радіус уписаного кола, то:  $S = pr = \frac{7+x}{2} \cdot 1 = \frac{7+x}{2}$ .

З іншого боку, площу трикутника можна виразити за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{7+x}{2} \cdot \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{7-x}{2}}.$$

Отримуємо ірраціональне рівняння  $\sqrt{\frac{7+x}{2} \cdot \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{7-x}{2}} = \frac{7+x}{2}$ .

З нерівності трикутника маємо, що  $1 < x < 7$ . Тоді обидві частини рівняння існують і є додатними. Розглянемо рівносильне (за таких умов) рівняння

$$\frac{7+x}{2} \cdot \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{7-x}{2} = \left( \frac{7+x}{2} \right)^2.$$

Оскільки  $x = -7$ , очевидно, є стороннім коренем, то рівняння зводиться до наступного:

$$\frac{(1+x)(x-1)(7-x)}{4} = 7+x, \text{ тобто } x^3 - 7x^2 + 3x + 35 = 0.$$

Виконаємо рівносильні перетворення та розв'яжемо рівняння:

$$x^3 - 7x^2 + 3x + 35 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 5x^2) - (2x^2 - 10x) - (7x - 35) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2 - 2x - 7) = 0.$$

Із урахуванням умови  $1 < x < 7$  отримуємо два розв'язки:  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$ .

Порахувавши площу трикутника за формулою  $S = \frac{7+x}{2}$ , отримаємо два можливих варіанти для площі (один з них відповідає «єгипетському» прямокутному трикутнику зі сторонами 3, 4, 5).

*Відповідь.* 6 см<sup>2</sup> або  $(4 + \sqrt{2})$  см<sup>2</sup>.

## V. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим: .....

.....

.....



- (-) що залишилося незрозумілим: .....
- .....
- .....
- (?) що здивувало або зацікавило: .....
- .....
- .....

### Можливі теми проєктів

1. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних рівнянь виду  $\sqrt{ax+b+c^2+2c\cdot\sqrt{ax+b}} \pm \sqrt{ax+b+d^2+2d\cdot\sqrt{ax+b}} = e$ , враховуючи варіанти різних значень параметрів  $a, b, c, d, e$ . Продемонструйте роботу алгоритму на наступних прикладах:
  - а)  $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ ;
  - б)  $\sqrt{x-4+4\sqrt{x-8}} + \sqrt{x-4-4\sqrt{x-8}} = 2$ ;
  - в)  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 3$ ;
  - г)  $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$ ;
  - г)  $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$ .
2. Опишіть загальну ідею застосування множення обох частин рівняння на множник, спряжений з виразом виду  $\sqrt{f(x)} \pm a$  або виду  $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$ , задля отримання рівняння-наслідку. Продемонструйте реалізацію ідеї на наступних прикладах:
  - а)  $(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+x^2+x-7) = x$ ;
  - б)  $\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x$ ;
  - в)  $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$ ;
  - г)  $\frac{\sqrt{21+x} + \sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x} - \sqrt{21-x}} = \frac{21}{x}$ ;
  - г)  $\frac{\sqrt{6+x} - \sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x} + \sqrt{6-x}} = \frac{x}{6}$ .